Extra uppgifter inför kontrollskrivning 1

1. Bestäm, samtliga lösningar till ekationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 4 \\ x + 2y + 5z = 0 \\ x + 3y - z = 6 \end{cases}$$

Gauss eliminering ger:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & 4 \\ 0 & 1 & -6 & 6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -6 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 12 & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7 & 8 \\ 0 & 1 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{12} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{26}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{12} \end{bmatrix}$$

Svar: $(x, y, z) = (\frac{26}{12}, 1, -\frac{10}{12})$.

2. Bestäm, samtliga lösningar till ekationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 8 \\ -x + 5y + z = 10 \\ x - 18y + z = -38 \end{cases}$$

Gauss eliminering ger:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 8 \\ -1 & 5 & 1 & 10 \\ 1 & -18 & 1 & -38 \end{bmatrix} \to \begin{matrix} r_1 + 2r_2 \\ \\ r_3 + r_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 13 & -2 & 28 \\ -1 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & -13 & 2 & -28 \end{bmatrix} \to r_1 + r_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 1 & 10 \\ 0 & -13 & 2 & 28 \end{bmatrix}$$

Svar: $(x, y, z) = (-24 + \frac{23}{2}, t, -14 + \frac{13}{2}t)$.

3. För vilka värden på talen a och b saknar systemet

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z + u = 8 \\ -x + 5y + z + 2u = 10 \\ x - 18y + z + au = b \end{cases}$$

lösningar.

Gauss eliminering ger:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 1 & 8 \\ -1 & 5 & 1 & 2 & 10 \\ 1 & -18 & 1 & a & b \end{bmatrix} \to \begin{matrix} r_1 + 2r_2 \\ \\ r_3 + r_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0 & 13 & -2 & 5 & 28 \\ -1 & 5 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & -13 & 2 & a+2 & b+10 \end{bmatrix}$$

$$\to r_1 + r_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 7+a & b+38 \\ -1 & 5 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & -13 & 2 & a+2 & b+10 \end{bmatrix}$$

Svar: om $a \neq -7$ och $b \neq -38$ så saknar systemet lösning.

4. Låt $A, B \in M_{n,n}(\mathbf{R})$. Är det sant eller falskt att

$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$$

Lösning:

$$(A - B)(A + B) = A^2 - BA + AB - B^2 = A^2 - B^2$$

Svar: Sant bara om $AB = BA$.

5. Låt $A, B, C \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ vara matriser sådana att $AB = BC$. Visa att $A^n B = BC^n$.

   Svar: $A^2B = A(AB) = A(BC) = (AB)C = (BC)C = BC^2$, $A^nB = A(A^{n-1}B)$. Det följer att $A^3B = A(BC^2) = (AB)C^2 = AC^3$ och så vidare till $A^nB = BC^n$.

6. En matris $A \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ kallas idempotent om $A^2 = A$. Visa att om A är idempotent så är A^T och $I_n - A$ också idempotenta.

   Svar: $(A^T)^2 = (A^2)^T = A^T, (I_n - A)^2 = (I_n - 2A + A^2) = (I_n - 2A + A) = I_n - A$.

7. Låt $A \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ vara en matris sådan att $A^k = 0$ för något positivt heltal $k > 0$. Visa att $I_n - A$ är inverterbar.

   Svar: $(I_n - A)(I_n + A + \ldots + A^{k-1}) = I_n + A + \ldots + A^{k-1} - A - A^2 - \ldots - A^{k-1} - A^k = I_n$. Då är $(I_n + A + \ldots + A^{k-1}) = A^{-1}$, eftersom inversen är unik.

8. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

   Beräkna:

$$(A^2)^{-1}, \ (2A)^{-1}, \ (2A^{-1})^T, \ (B^TA^{-1}B)^T \text{ och } (B^TA^{-1}B)^{-1}.$$

   Svar:

$$(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, (2A)^{-1} = \frac{1}{2}A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$(2A^{-1})^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, (B^TA^{-1}B)^T = \begin{pmatrix} 5 & -19 \\ -26 & 45 \end{pmatrix}, (B^TA^{-1}B)^{-1} = -\frac{1}{-269}\begin{pmatrix} 45 & 26 \\ 19 & 5 \end{pmatrix}.$$