Extra uppgifter inför kontrollskrivning 2

1. Bestäm, samtliga värden på det reella talet $a \in \mathbf{R}$ för vilka det homogena systemet neda har icketriviala lösningar.

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + ay + a^2 z = 0 \\ x + 2y + az = 0 \end{cases}$$

Den associerad matris är:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}, det(A) = 2(a-1)$$

Det följer att systemet har lsningen $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ om $a \neq 1$. Om $a = 1$ Gauss eliminering ger:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ och då är lösning } t(1, 0, -1), t \in \mathbf{R}.$$

2. Bestämma samtliga reela tal $x \in \mathbf{R}$ sådana att

$$det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$0 = det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 1(-1)^{1+1} det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ 0 & x & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = x^2 - 2x + 2$$

Eftersom är $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$ kan det aldrig vara lika med noll.

3. Lå A vara matrisen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 12 & 357 \\ 0 & 2 & 84 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Beräkna $det(AA^T)$. Formeln $det(AB) = det(A)det(B)$, som bevisas senare i kursen, får användas.

$$det(AA^T) = det(A)det(A^T) = det(A)det(A) = det(A^2) = 6^2 = 36$$

4. Låt

$$A = \begin{pmatrix} k-2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & k+3 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) Bestäm om A är inverterbar.

   (b) Beräkna inversen när matrisen är inverterbar.

(a)
$$det(A) = 2(k^2 + k) = 2k(k+1)$$

Eftersom är en kvadratisk matris inverterbar om och endast om determinanten är skild från noll, så är A inverterbar om och endast om $k \neq 0, 1$.

(b) I fallet $k \neq 0, 1$ så är
$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A).$$

Kofaktorer till A är

$$\begin{array}{ccc} C_{1,1} = 2(k+3) & C_{2,1} = -12 & C_{3,1} = -24 \\ C_{1,2} = 0 & C_{2,2} = 0 & C_{3,2} = -(k^2+k) \\ C_{1,3} = 2 & C_{2,3} = 2(k-2) & C_{3,3} = 4(k-2) \end{array}$$

Det följer att

$$A^{-1} = \frac{1}{2k(k+1)} \begin{pmatrix} 2(k+3) & -12 & -24 \\ 0 & 0 & -(k^2+k) \\ 2 & 2(k-2) & 4(k-2) \end{pmatrix}$$

5. En triangel har hörn i punkterna $(1, 2, 1), (-1, 3, 0)$ och $(1, 1, 1)$. Bestäm cosinus för samtliga vinklar i triangeln samt triangelns omkrets.

Med $P = (1, 2, 1), Q = (-1, 3, 0)$ och $R = (1, 1, 1)$ får triangeln sidor:

$$\vec{PQ} = (-2, 1, -1), \vec{PR} = (0, -1, 0) \text{ och } \vec{QR} = (2, -2, 1)$$

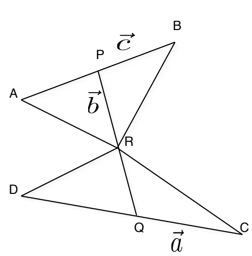
Då blir:
$$\|\vec{PQ}\| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}, \|\vec{PR} = 1\|, \|\vec{QR}\| = 3.$$

Triangels omkrets är lika med $4 + \sqrt{6}$. Låt nu θ beteckna vinkeln mellan $\vec{PQ}$ och $\vec{PR}$. Då gäller:
$$cos(\theta) = \frac{\vec{PQ} \cdot \vec{PR}}{\|\vec{PQ}\|\|\vec{PR}\|} = \frac{(-2, 1, -1) \cdot (0, -1, 0)}{\sqrt{6} \cdot 1} = \frac{-1}{\sqrt{6}}.$$

Triangelns övriga vinklar beräknas på samma sätt.

6. Låt A, B, C, D vara distinkta punkter i planet och låt P, Q, R vara midpunkterna av respektive AB, CD, PQ. Visa att:

$$\vec{RA} + \vec{RB} + \vec{RC} + \vec{RD} = \vec{0}.$$



Låt $\vec{PB} = \vec{c}, \vec{RP} = \vec{b}, \vec{QC} = \vec{a}$. Då är $\vec{RQ} = -\vec{b}, \vec{RB} = \vec{b} + \vec{c}, \vec{RC} = -\vec{b} + \vec{a}, \vec{RD} = -\vec{b} - \vec{a}, \vec{RA} = \vec{b} - \vec{c}$.

$$\vec{RA} + \vec{RB} + \vec{RC} + \vec{RD} = \vec{b} - \vec{c} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{b} + \vec{a} - \vec{b} - \vec{a} = \vec{0}.$$