Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några övningar på geometri och vektorer inför lappskrivning nummer 2 på kursen Linjär algebra, SF1604, ht 07.

1. Linjens riktningsvektor är $\overline{PQ} = (2,1,2) - (1,1,-1) = (1,0,3)$. En punkt (x,y,z) ligger på linjen precis då
$$(x,y,z) = (1,1,-1) + t(1,0,3) = (1+t, 1, -1+3t)$$
för något tal t.

   Vi söker nu planets ekvation. En normal till planet är vinkelrät mot vektorerna $(3,0,1)$ och $(2,1,1)$ eftersom dessa är parallella med planet. Kryssprodukten av dessa vektorer ger en normal
$$\bar{n} = (3,0,1) \times (2,1,1) = ... = (-1,-1,3).$$
   Planets ekvation blir då
$$-1(x-0) + (-1)(y-0) + 3(z-0) = 0 \quad \text{dvs} \quad -x-y+3z = 0.$$
   En punkt (x,y,z) tillhör alltså planet precis då dess koordinater satisfierar denna ekvation. Således, en punkt $(x,y,z) = (1+t, 1, -1+3t)$ på linjen ligger i planet planet om och endast om
$$-(1+t) - 1 + 3(-1+3t) = 0,$$
   för något tal t. För $t = 5/8$ är denna ekvation uppfylld. Den sökta skärningspunkten är
$$(x,y,z) = (1+\frac{5}{8}, 1, -1+3\frac{5}{8}) = (\frac{13}{8}, 1, \frac{7}{8}).$$

2. Med $P = (1,2,1)$, $Q = (-1,3,0)$ och $R = (1,1,1)$ får triangeln sidorna
$$PQ = (-2,1,-1),\ \ PR = (0,-1,0)\ \text{ och }\ QR = (2,-2,1).$$
   Vi använder nu kända formler för att beräkna vinklar och längder samt arean.
$$\| PQ \| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6},\ \ \| PR \| = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1,$$
   och
$$QR = \sqrt{^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{9} = 3.$$
   Triangelns area är hälften av den area som det parallellogram har, som spänns upp av PR och PQ dvs
$$arean = \frac{1}{2} \| PQ \times PR \|$$
   Vi får enligt formel för beräkning av kryssprodukt att
$$PQ \times PR = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -\bar{e}_1 + 0\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3.$$
   Arean blir således
$$\frac{1}{2} \| PQ \times PR \| = \frac{1}{2} \| (-1,0,2) \| = \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 2^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Låt nu θ beteckna vinkeln mellan PQ och PR. Då gäller

$$\cos(\theta) = \frac{PQ \cdot PR}{\parallel PQ \parallel \cdot \parallel PR \parallel} = \frac{(-2,1,-1)\cdot(0,-1,0)}{\parallel (-2,1,-1) \parallel \cdot \parallel (0,-1,0) \parallel} = \frac{-1}{\sqrt{6}}.$$

Triangelns övriga vinklar beräknas på samma sätt

3. Benämn punkterna $P = (1,1,2)$, $Q = (2,3,4)$, $R = (3,-1,-1)$ och $S = (4,1,1)$. Ett parallellogram kännetecknas av att sidorna paravis är parallella och som följd därav lika långa.

   Vi finner efter prövning att

$$PQ = (1,2,2) = RS \quad \text{och} \quad PR = (2,-2,-3) = QS.$$

   Alltså parallellogram.

   OBS Vi var tvugna att pröva oss fram för att hitta rätt sidor.

4. Vektorerna ligger i samma plan precis då volymen av den parallellepiped som spänns upp av dessa vektorer är lika med 0. Denna volym är beloppet av en determinant vars rader består av de givan vektorerna. Vi får alltså

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2+a \\ 0 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + (a-2) = a - 6.$$

   Precis när $a = -6$ ligger vektorerna i samma plan.

5. En vektor parallell med planet är linjens riktningsvektor $(1,0,-1)$. En annan vektor parallell med planet är vektorn mellan punkten $(2,1,0)$ och punkten $(1,3,2)$ på linjen, dvs vektorn $(1,-2,-2)$. En normal till detta plan ges av kryssprodukten av dessa vektorer

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -2\bar{e}_1 + 1\bar{e}_2 + (-2)\bar{e}_3.$$

   Planets ekvation blir då

$$-2(x-2) + (y-1) - 2z = 0 \quad \text{dvs} \quad 2x - y + 2z = 3.$$

   Linjen genom punkten $(1,2,1)$ parallell med planets normal har parameterforman

$$(x,y,z) = (1,2,1) + t(-2,1,-2).$$

   Vi bestämmer nu det t-värdet för vilket linjen skär planet. Som i uppgift 1 får vi

$$2(1-2t) - (2+t) + 2(1-2t) = 3 \quad \text{som ger} \quad t = \frac{-1}{9}.$$

   Med det dubbla t-värdet fortsätter vi från den givna punkten passerar planet och hamnar på planets andra sida, lika långt från planet ifråga som startpunkten ligger på. Detta är spegelbilden, som alltså har koordinaterna

$$(x,y,z) = (1,2,1) + \frac{-2}{9}(-2,1,-2) = (\frac{13}{9}, \frac{16}{9}, \frac{13}{9}).$$

6. Vi skall bestämma talet a så att det finns tal t och tal s med

$$(1,1,2) + t(1,0,-1) = (2,a,1) + s(2,1,-1).$$

Dessa värden på t och s ger då en gemensam punkt, dvs en skärningspunkt. Ekvationen ovan ger likheten

$$(-1, 1-a, 1) = (2s - t, s, -s + t)$$

dvs systemet

$$\begin{cases} 2s - t = -1 \\ s = 1 - a \\ -s + t = 1 \end{cases}$$

Betraktar vi enbart den första och sista av dessa ekvationer får vi att $s = 0$ och $t = 1$. Med $a = 1$ kommer även ekvation nummer två att vara uppfylld.

Sammanfattningsvis: enda möjliga värde på a är 1 och vi får då skärningspunkten $(2, 1, 1)$.

7. Vinkeln mellan planen beskriver vi med hjälp av vinkeln mellan planens normaler, (rita figur!). Dessa normaler är $(1, 1, 3)$ och $(2, -1, 1)$ och för cosinus för vinkeln θ mellan dem gäller

$$\cos(\theta) = \frac{(1,1,3)\cdot(2,-1,1)}{\parallel (1,1,3) \parallel \cdot \parallel (2,-1,1) \parallel} = \frac{4}{\sqrt{11}\sqrt{6}}.$$

8.

$$0 = (1,1,1)\cdot(1,2,a) = 1 + 2 + a,$$

ger $a = -3$. Vidare kräver vi att

$$0 = (1,1,1)\cdot(1,b,c) \quad \text{och} \quad 0 = (1,2,a)\cdot(1,b,c).$$

Då $a = -3$ får vi att

$$0 = 1 + b + c \quad \text{och} \quad 0 = 1 + 2b - 3c.$$

Detta linjära system för b och c ger $b = -4/5$ och $c = -1/5$.

9. Kortaste avståndet är vinkelräta avståndet. Låt O beteckna origo och P en godtycklig punkt på linjen. Avståndet ges av längden av den vektor OP som är vinkelrät mot linjens riktningsvektor $(2, 1, -1)$. Då $OP = (1 + 2t, 1 + t, 1 - t)$ får vi rätt t-värde ur ekvationen

$$0 = (2,1,-1)\cdot(1+2t, 1+t, 1-t) = 2(1+2t) + (1+t) - (1-t) = 6t + 2,$$

dvs $t = -1/3$. Avståndet blir alltså lika med

$$\parallel (1 + 2\frac{-1}{3}, 1 + \frac{-1}{3}, 1 - \frac{-1}{3}) \parallel = \parallel (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}) \parallel = \sqrt{(\frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3})^2 + (\frac{4}{3})^2} = \frac{1}{3}\sqrt{21}$$

10. En normal till planet är $\bar{n} = (1, 1, -2)$. Längden av denna vektor är

$$\parallel \bar{n} \parallel = \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{6}.$$

Vi får en vektor $\bar{e}$ med längd 1 och med samma riktning som normalen $\bar{n}$ om vi multiplicerar $\bar{n}$ med $1/||\bar{n}||$ dvs med $1/\sqrt{6}$:

$$\bar{e} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2).$$

Punkten med koordinaterna $(1, 0, 0)$ tillhör givna planet eftersom denna punkts koordinater satisfierar planets ekvation $x + y - 2z = 1$. Punkten med koordinaterna

$$Q = (1,0,0) + \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2) = (\frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}})$$

kommer att ligga på avståndet ett från givna planet. Ett plan med normalvektorn $\bar{n} = (1, 1, -2)$ och genom punkten Q kommer att vara paralellt med givna planet och ligga på avstånd ett från detta. Dess ekvation blir

$$(x - \frac{\sqrt{6}+1}{\sqrt{6}}) + (y - \frac{1}{\sqrt{6}}) - 2(z - \frac{-2}{\sqrt{6}}) = 0.$$

11. Den sökta linjens riktning är vinkelrät mot planets normal, eftersom linjen ligger i planet. Så om $\bar{v}$ är en riktningsvektor för linjen så måste $\bar{v}$ vara vinkelrät mot planets normal $(1, 2, -2)$. Dessutom var det givet i uppgiften att $\bar{v}$ är vinkelrät mot vektorn $(1, 1, 1)$. Väljer vi $\bar{v}$ som kryssprodukten mellan $(1, 2, -2)$ och $(1, 1, 1)$ så får vi en riktningsvektor för den sökta linjen.

    En sedvanlig beräkning av kryssprodukt, jfr t ex uppgift 2, ger
$$(1, 2, -2) \times (1, 1, 1) = (4, -3, -1).$$
    Nu har vi både en punkt $(3, 0, 1)$ på den sökta linjen och en riktningsvektor $(4, -3, -1)$ för linjen. Således

    Svar: $(x, y, z) = (3, 0, 1) + t(4, -3, -1)$.

12. (a) Parallellepipeden spänns upp av vektorerna som mellan origo och de angränsande hörnen, dvs av vektorerna $(1, 1, 1)$, $(2, 0, -1)$ och $(3, 1, 2)$. Enligt känd formel ges då volymen av beloppet av den determinant som innehåller dessa vektorer som kolonner, eller rader, dvs av determinanten
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$
    som blir lika med
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4.$$
    Volymen av parallellepipeden är alltså 4.

    (b) Huruvida en punkt P med koordinaterna (x, y, z) ligger inuti, på ytan till, eller utanför parallellepipeden, avgörs av värdena på talen λ_1, λ_2 och λ_3 i utvecklingen
$$(x, y, z) = \lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(2, 0, -1) + \lambda_3(3, 1, 2). \qquad (\star)$$
    Ritar man en figur så ser man att om samtlig av dessa tal λ_1, λ_2 och λ_3 ligger strikt mellan talen 0 och 1 så ligger punkten inuti parallellepipeden. Om ett av dessa tal är 0 eller 1 och övriga strikt mellan 0 och 1 så ligger punkten på ytan. I annat fall ligger punkten utanför parallellepipeden.

    Ekvationen $(\star)$ ger upphov till tre ekvationssytem för de tre punkterna i fråga. Vi kan lösa dessa parallellt:
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0.5 & 4 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 0.5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 4 & 6 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0.5 & 1.25 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 1.75 \\ 0 & -1 & 0 & -0.5 & -1 & -0.75 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0.5 & 1.25 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 1.75 \\ 0 & 1 & 0 & 0.5 & 1 & 0.75 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0.5 & 1.25 \end{array}\right)$$
    De sökta värdena på λ_1, λ_2 och λ_3 ges av kolonnerna i matrisen till höger om det vertikala strecket. Vi ser att punkten $(3, 1, 1)$ ligger inuti paralellepipeden, $(4, 1, 0.5)$ på ytan av parallellepipeden och $(6, 3, 4)$ utanför parallellepipeden.

13. I precis de uppgifter där mätning av längder och vinklar förekommer skall ON-system påpekas annars kan mätningar inte utföras med våra standardformler. Jag glömde skriva detta i uppgifterna 4, 7, 8, 9, 11 samt nummer 12. Uppgiften 1 går att lösa utan att man förutsätter ett ON-system