Matematiska Institutionen
KTH

**TENTAMEN i Linjär algebra, SF1604, den 15 december, 2009.**
Kursexaminator: Sandra Di Rocco

- Svaret skall motiveras och lösningen skrivas ordentligt och klart.
- Inga hjälpmedel är tillåtna.
- Betyg Fx ger möjlighet till att komplettera till betyg E. Datumet och formen på kompletteringsprovet meddelas via email.

Betyg enligt följande tabell:

| | |
|---|---|
| $A$ | minst 35 poäng |
| $B$ | minst 30 poäng |
| $C$ | minst 25 poäng |
| $D$ | minst 20 poäng |
| $E$ | minst 15 poäng |
| $Fx$ | 13-14 poäng |

## DEL I

15 poäng totalt inklusive bonus poäng.

1. Låt $\vec{v} = (1, 2, 1), \vec{w} = (1, 2, -1), \vec{u}_t = (5, 3+t, 1) \in \mathbb{R}^3$, där $t \in \mathbb{R}$.

   (a) (2 p.) För vilka $t \in \mathbb{R}$ är vektorerna $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}_t$ linjärt oberoende? Matrisen
   $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 5 & 3+t & 1 \end{pmatrix}$$
   har determinanten lika med $2t - 14$. då är vektorerna linjärt oberoende om $t \neq 7$.

   (b) (3 p.) Bestäm $\dim(Span(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}_t))$ för alla $t \in \mathbb{R}$. Om $t \neq 7$ då utgör vektorerna en bas till $\mathbb{R}^3$ och dimensionen är lika med 3.
   Om $t = 7$ då är de linjärt beroende. Vektorerna $\vec{v} = (1, 2, 1), \vec{w} = (1, 2, -1)$ är linjärt oberoende aftersom $k_1(1, 2, 1) + k_2(1, 2, -1)$ leder till $k_1 + k_2 = 0, k_1 - k_2 = 0$ som ger $k_1 = k_2 = 0$. Detta visar att i det här fallet är dimensionen lika med 2.

2. Betrakta följande linjer i rummet $\mathbb{R}^3$ :
   $$l_1 : \begin{cases} x + y & = & 1 \\ 2x - z & = & 0 \end{cases}, \quad l_2 : \begin{cases} x & = & 1 - t \\ y & = & -t \\ z & = & 1 - t \end{cases}$$

   (a) (1 p.) Är linjerna parallella? Den parametriska ekvationen till linjen $l_1$ är:
   $$l_1 : \begin{cases} x & = & t \\ y & = & 1 - t \\ z & = & 2t \end{cases}$$
   Man ser att linjärna inte är parallella föra att deras riktningsvektorer: $\vec{v_1} = (1, -1, 2), \vec{v_2} = (-1, -1, -1)$ inte är parallella (multipel).
   Svar: Nej

(b) (2 p.) Skär linjerna varandra? Linjen $l_2$ har ekvationen:

$$l_2 : \begin{cases} x &= z \\ y &= x-1 \end{cases}$$

Linjerna skär varandra om systemet:

$$\begin{cases} x &= z \\ y &= x-1 \\ x+y &= 1 \\ 2x-z &= 0 \end{cases}$$

är löserbar. Men man ser att systemet saknar lösningar.
Svar: Nej

(c) (2 p.) Skriv ekvationen till planet $\pi$, som innehåller linjen $l_1$ och är parallell till linjen $l_2$.
En normalvektorn, $\vec{n}$, till $\pi$ ska vara ortogonal mot $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ och då är $\vec{n}$ parallell till $\vec{v_1} \times \vec{v_2}$.

$$\vec{v_1} \times \vec{v_2} = (3, -1, -2)$$

Ekvationen till $\pi$ är $3x - y - 2z + D = 0$ för något $D \in \mathbb{R}$. Eftersom $\pi$ innehåller $l_1$ och $(0,1,0) \in l_1$, ska $(0,1,0) \in \pi$, och $-1 + D = 0$, som ger $D = 1$.
Svar: $\pi : 3x - y - 2z + 1 = 0$.

3. Betrakta följande matris:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) (2 p.) Bestäm egenvektorerna till $A$. Den karakteristiska ekvationen är $p_A(\lambda) = (\lambda^2 - 3)(2 - \lambda) = 0$ som ger att egenvärdena till $A$ är $\lambda = 2, \sqrt{3}. -\sqrt{3}$. Egenrummet $E_2$ till $\lambda = 2$ definieras av systemet:

$$\begin{cases} -2x + z &= 0 \\ 3x - 2z &= 0 \end{cases}$$

som ger $E_2 = Span(0,1,0)$. Egenrummet $E_{\sqrt{3}}$ till $\lambda = \sqrt{3}$ definieras av systemet:

$$\begin{cases} -\sqrt{3}x + z &= 0 \\ (2-\sqrt{3})y &= 0 \\ 3x - \sqrt{3}z &= 0 \end{cases}$$

som ger $E_{\sqrt{3}} = Span(1, 0, \sqrt{3})$. Egenrummet $E_{-\sqrt{3}}$ till $\lambda = -\sqrt{3}$ definieras av systemet:

$$\begin{cases} \sqrt{3}x + z &= 0 \\ (2+\sqrt{3})y &= 0 \\ 3x + \sqrt{3}z &= 0 \end{cases}$$

som ger $E_{\sqrt{3}} = Span(1, 0, -\sqrt{3})$.
Svar: Egenvektorerna är vektorerna som ligger på $Span(0,1,0) \cup Span(1,0,\sqrt{3}) \cup Span(1,0,-\sqrt{3})$ (unionen av tre linjer).

(b) (1 p.) Är $A$ diagonaliserbar? $A$ är diagonaliserbar aftersom $A$ har tre distinkta egenvärden.

(c) (2 p.) Bestäm $A^{10}$. Observera att

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

och då är:

$$A^{10} = (A^2)^5 = \begin{pmatrix} 3^5 & 0 & 0 \\ 0 & 4^5 & 0 \\ 0 & 0 & 3^5 \end{pmatrix}$$

DEL II, 15 poäng totalt

4. Betrakta mängden av komplexa tal $\mathbb{C}$ som ett vektor rum över $\mathbb{R}$. Låt $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vara avbildningen definierat av $F(z) = z + \overline{z}$.

   (a) (2 p.) Visa att $F$ är en linjär avbildning. Låt $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $F(z_1 + z_2) = z_1 + z_2 + \overline{z_1 + z_2} = z_1 + z_2 + \overline{z_1} + \overline{z_2} = F(z_1) + F(z_2)$.
   Låt $k \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}$, $F(kz) = kz + \overline{kz} = kz + k\overline{z} = kF(z)$. Detta visar att $F$ är linjär.

   (b) (2 p.) Bestäm $Ker(F)$. $Ker(F) = \{z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, F(z) = 0\} = \{\alpha + i\beta \in \mathbb{C}, z = \alpha + i\beta = -\overline{z} = -\alpha + i\beta\}$ och då är:

   $$Ker(F) = \{z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}, \alpha = 0\}$$

   (c) (1 p.) Är $F$ en isomorfi? Observera att $Ker(F) = Span(i) = Span((0,1)) \subset \mathbb{R}^2$ som visar att $\dim(Ker(F) = 1$. Det följer att $rang(F) = 2 - 1 = 1$ och att $F$ inte är en isomorfi.

5. Betrakta följande system, där $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{cases} \lambda x + \lambda y = \mu \\ \lambda x + y = \mu \\ \lambda x + y - (\lambda + \mu) z = \mu \end{cases}$$

   (a) (2 p.) För vilka $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ har systemet en entydig lösning? Koefficientmatrisen associerad till systemet är:

   $$A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 0 \\ \lambda & 1 & -\lambda - \mu \end{pmatrix}$$

   Vi ser att $det(A) = -(\lambda + \mu)\lambda(1 - \lambda)$. Det följer att systemet har en entydig lösning om och endast om $\lambda \neq -\mu$ och $\lambda \neq 0$ och $\lambda \neq 1$.

   (b) (3 p) Sätt $\mu = 0$. Bestäm för vilka $\lambda \in \mathbb{R}$ har systemet ett lösningsrum av dimension 2. Om $\mu = 0$ då har systemet oändligt många lösningar om $\lambda = 0$ eller $\lambda = 1$.
   Om $\lambda = 0$ då är lösningsrummet lika med $Span((1,0,0),(0,0,1))$, som har dimension 2.
   Om $\lambda = 1$ då är lösningsrummet lika med $Span((1,-1,0))$, som har dimension 1.
   Svar: systemet har ett lösningsrum av dimension 2 bara om $\lambda = 0$.

6. Betrakta rummet $\mathbb{R}^3$ med den standardskalärprodukt.

   (a) (3p.) Bestäm för vilka $a \in \mathbb{R}$ finns det en vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ sådan att $||\vec{v}|| = a$ och $proj_U(\vec{v}) = (1,3,0)$, där $U$ är $xy$-planet , dvs planet $z = 0$. Låt $\vec{v} = (x,y,z)$. Eftersom $\{(1,0,0),(0,1,0)\}$ utgör en ON bas till $U$ är

   $$proj_U(\vec{v}) =< (x,y,z),(1,0,0) > (1,0,0)+ < (x,y,z),(0,1,0) > (0,1,0) = (x,y,0) = (1,3,0).$$

   Låt då $\vec{v} = (1,3,z)$. Likhet $||\vec{v}|| = a$ ger $\sqrt{10 + z^2} = a$. Från ekvationen $z^2 = a^2 - 10$ så följer det att:

   - Om $0 \leq a < \sqrt{10}$ då finns det ingen vektor $\vec{v}$.
   - om $a = \sqrt{10}$ då finns det en vektor $\vec{v} = (1,3,0)$.
   - om $a > \sqrt{10}$ då finns det två vektorer $\vec{v}_1 = (1,3,\sqrt{a^2 - 10}), \vec{v}_2 = (1,3,-\sqrt{a^2 - 10})$.

(b) (2p.) Bestäm om det finns ett $a$ och en motsvarande vektor $\vec{v}$ sådant att vinkeln mellan $proj_U(\vec{v})$ och $\vec{v}$ är lika med $\frac{\pi}{3}$.
Låt $\theta$ vara vinkeln mellan $proj_U(\vec{v})$ och $\vec{v}$.

$$\cos(\theta) = \frac{< \vec{v}, proj_U(\vec{v}) >}{||\vec{v}||||proj_U(\vec{v})||}.$$

Det följer att man ska bestämma för vilka $a$ är $10 =< \vec{v}, proj_U(\vec{v}) >= a\sqrt{10}\frac{1}{2}$. Detta gäller för $a = 2\sqrt{10}$.

**DEL III**
10 poäng totalt

7. (5p.) I tillämpningar inom statistik förekommer *stokastiska matriser*. Det är kvadratiska matriser där elementen i matrisen är sannolikheter och därför ligger i intervallet $[0,1]$ och där summan av elementen i varje kolonn är lika med 1.

(a) Visa att produkten av två stokastiska matriser av samma storlek är en stokatisk matris.
Låt $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ vara två stokastiska matriser. Betrakta matriser $AB = (\sum_k a_{ik}b_{kj})$. Då är

- $\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \geq 0$ eftersom $a_{ik} \geq 0, b_{kj} \geq 0, k = 1, \ldots, n$.
- $\sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} \leq \sum_{k=1}^n b_{kj} = 1$ eftersom $a_{ik} \leq 1, k = 1, \ldots, n$.

Summan av elementen i kolonn $j$ ges av

$$\sum_{i=1}^n (\sum_k a_{ik}b_{kj} = b_{1j}(\sum_1^n a_{i1}) + b_{2j}(\sum_1^n a_{i2}) + \ldots + b_{nj}(\sum_1^n a_{in}) = \sum_{i=1}^n b_{ij} = 1,$$

eftersom $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ för $j = 1, \ldots, n$.

(b) Visa att varje stokastik matris har ett egenvärde som är 1. Låt $A = (a_{ij})$ vara en stokastisk matris.

$$A - I_n = \begin{pmatrix} a_{11}-1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-1 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \ldots \\ R_n \end{pmatrix}$$

$R_1 + \ldots r_{n-1} = (\sum_1^{n-1} a_{1j} - 1) + \ldots + (\sum_1^{n-1} a_{nj} - 1) = -a_{1n} - \ldots - a_{nn} = R_n$. Det följer att $det(A - I_n) = 0$ som visar att $\lambda = 1$ är en rot till den karakterstiska polynomet $det(A - \lambda I_n) = 0$.

8. (5 p.) Låt $(V, <>)$ vara ett enligtdimensionellt euklidiskt rum. Låt $F : V \to V$ vara en linjär avbildning sådan att $||F(\vec{v})|| = ||\vec{(v)}||$ för alla $\vec{v} \in V$.

(a) Visa att $< F(\vec{u}), F(\vec{v}) >=< \vec{u}, \vec{v} >$ för alla $\vec{u}, \vec{v} \in V$.

$$||\vec{u} + \vec{v}||^2 =< \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} >= ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2 < \vec{u}, \vec{v} > .$$

$$||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||F(\vec{u} + \vec{v})||^2 = ||F(\vec{u}) + F(\vec{v})||^2$$

Detta ger:

$$||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2 < \vec{u}, \vec{v} >= ||F(\vec{u})||^2 + ||F(\vec{v})||^2 + 2 < F(\vec{u}), F(\vec{v}) >$$

och då $< F(\vec{u}), F(\vec{v}) >=< \vec{u}, \vec{v} >$ .

(b) Visa att om $U \subseteq V$ är ett delrum till $V$ sådan att $F(\vec{u}) \in U$ för alla $\vec{u} \in U$ då gäller det att $F(\vec{v}) \in U^{\perp}$ för alla $\vec{v} \in U^{\perp}$.

Observera att $F(\vec{v}) = \vec{0}$ ger $||F(\vec{v})|| = ||\vec{0}|| = 0$ och då $\vec{v} = \vec{0}$. Detta betyder att $Ker(F) = \{\vec{0}$ och att $F$ är en isomorfi. Låt $U \subseteq V$ vara ett delrum till $V$ sådan att $F(\vec{u}) \in U$ för alla $\vec{u} \in U$, dvs $F(U) \subseteq U$. Eftersom $F$ är injektiv är $U \subseteq F(U)$ som betyder att $F(U) = U$ och då $U^{\perp} = F(U)^{\perp}$. Om $\vec{v} \in U^{\perp}$, då är $< \vec{v}, \vec{u} >= 0$ för alla $u \in U$. Det följer att $< F(\vec{u}), F(\vec{v}) >=< \vec{u}, \vec{v} >= 0$ för alla $u \in U$ som visar att $F(\vec{v}) \in F(U)^{\perp} = U^{\perp}$.