Matematiska Institutionen
KTH

TENTAMEN i Linjär algebra, SF1604, den 15 december, 2009.
Kursexaminator: Sandra Di Rocco

- Svaret skall motiveras och lösningen skrivas ordentligt och klart.
- Inga hjälpmedel är tillåtna.
- Betyg Fx ger möjlighet till att komplettera till betyg E. Datumet och formen på kompletteringsprovet meddelas via email.

Betyg enligt följande tabell:

A	minst 35 poäng
B	minst 30 poäng
C	minst 25 poäng
D	minst 20 poäng
E	minst 15 poäng
Fx	13-14 poäng

DEL I

15 poäng totalt inklusive bonus poäng.

1. Låt $\vec{v} = (1, 2, 1), \vec{w} = (1, 2, -1), \vec{u}_t = (5, 3 + t, 1) \in \mathbb{R}^3$, där $t \in \mathbb{R}$.
   (a) (2 p.) För vilka $t \in \mathbb{R}$ är vektorerna $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}_t$ linjärt oberoende?
   (b) (3 p.) Bestäm $\dim(Span(\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}_t))$ för alla $t \in \mathbb{R}$.

2. Betrakta följande linjer i rummet $\mathbb{R}^3$:

$$l_1 : \left\{ \begin{array}{rcl} x + y & = & 1 \\ 2x - z & = & 0 \end{array} \right. , \quad l_2 : \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 1 - t \\ y & = & -t \\ z & = & 1 - t \end{array} \right. \quad \text{där } t \in \mathbb{R}$$

   (a) (1 p.) Är linjerna parallella?
   (b) (2 p.) Skär linjerna varandra?
   (c) (2 p.) Skriv ekvationen till planet π, som innehåller linjen l_1 och är parallellt med linjen l_2.

3. Betrakta följande matris:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (a) (2 p.) Bestäm egenvektorerna till A.
   (b) (1 p.) Är A diagonaliserbar?
   (c) (2 p.) Bestäm A^{10}.

DEL II

15 poäng totalt.

4. Betrakta mängden av komplexa tal $\mathbb{C}$ som ett vektorrum över $\mathbb{R}$. Låt $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vara avbildningen definierad av $F(z) = z + \overline{z}$.
   (a) (2 p.) Visa att F är en linjär avbildning.
   (b) (2 p.) Bestäm $Ker(F)$.
   (c) (1 p.) Är F en isomorfi?

5. Betrakta följande system, där $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \lambda x & + & \lambda y & & & = & \mu \\ \lambda x & + & y & & & = & \mu \\ \lambda x & + & y & - & (\lambda+\mu)z & = & \mu \end{cases}$$

   (a) (2 p.) För vilka $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ har systemet en entydig lösning?
   (b) (3 p.) Sätt $\mu = 0$. Bestäm för vilka $\lambda \in \mathbb{R}$ systemet har ett lösningsrum av dimension 2.

6. Betrakta rummet $\mathbb{R}^3$ med den standardskalärprodukten.
   (a) (3 p.) Bestäm för vilka $a \in \mathbb{R}$ det finns en vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ sådan att $||\vec{v}|| = a$ och $proj_U(\vec{v}) = (1, 3, 0)$, där U är xy-planet , dvs planet med ekvation $z = 0$.
   (b) (2 p.) Bestäm om det finns ett a och en motsvarande vektor $\vec{v}$ så att vinkeln mellan $proj_U(\vec{v})$ och $\vec{v}$ är lika med $\frac{\pi}{3}$.

DEL III

10 poäng totalt

7. (5 p.) I tillämpningar inom statistik förekommer *stokastiska matriser*. Det är kvadratiska matriser där elementen i matrisen är sannolikheter och därför ligger i intervallet $[0, 1]$ och där summan av elementen i varje kolonn är lika med 1.
   (a) Visa att produkten av två stokastiska matriser av samma storlek är en stokatisk matris.
   (b) Visa att varje stokastisk matris har ett egenvärde som är 1.

8. (5 p.) Låt $(V, <>)$ vara ett änligtdimensionellt euklidiskt rum. Låt $F : V \to V$ vara en linjär avbildning sådan att $||F(\vec{v})|| = ||\vec{v}||$ för alla $\vec{v} \in V$.
   (a) Visa att $< F(\vec{u}), F(\vec{v}) >=< \vec{u}, \vec{v} >$ för alla $\vec{u}, \vec{v} \in V$.
   (b) Visa att om $U \subseteq V$ är ett delrum till V sådant att $F(\vec{u}) \in U$ för alla $\vec{u} \in U$ så gäller det att $F(\vec{v}) \in U^{\perp}$ för alla $\vec{v} \in U^{\perp}$.