Matematiska Institutionen
KTH

Kontrolskrivning till kursen SF1604 i Linjär algebra, November 23, 2009, 13:15-14:00.
Version B
Kursexaminator: Sandra Di Rocco

Minst 3 poäng ger godkänd och poängerna(3,4 eller 5) räknas som bonuspoäng till uppgift 1 i del 1 av tentamen.
Inget hjälpmedel tillåtet.
Lösningarna ska vara tydliga och ska MOTIVERAS.

Uppgift: Betrakta följande avbildning:

$$F : P_3(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^4, F(p(t)) = (p(0), p(1), p(-1), p(2)),$$

där $P_3(\mathbf{R})$ är vektorummet av polynom av grad högst 3.

1. (2 p.) Visa att F är en linjär avbildning.
2. (2 p.) Bestäm $R(F)$.
3. (1 p.) Är F en isomorfi?

Lösning: Om $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3 \in P_3(\mathbf{R})$ då är

$$F(p(t)) = (a_0, a_0 + a_1 + a_2 + a_3, a_0 - a_1 + a_2 - a_3, a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3).$$

1. (2 p.) Låt $p_1(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3, p_2(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2 + b_3t^3$ vara två element av $P_3(\mathbf{R})$ och $k \in \mathbf{R}$.
   (a) $(p_1 + p_2)(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + (a_3 - b_3)t^3$. $F((p_1 + p_2)(t)) = (a_0 - b_0, a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + a_2 + b_2 + a_3 + b_3, a_0 + b_0 - a_1 - b_1 + a_2 + b_2 - a_3 - b_3, a_0 + b_0 + 2a_1 + 2b_1 + 4a_2 + 4b_2 + 8a_3 + 8b_3) = (a_0, a_0 + a_1 + a_2 + a_3, a_0 - a_1 + a_2 - a_3, a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3) + (b_0, b_0 + b_1 + b_2 + b_3, b_0 - b_1 + b_2 - b_3, b_0 + 2b_1 + 4b_2 + 8b_3) = F(p_1) + F(p_2)$.
   (b) $F(kp_1(t)) = (ka_0, ka_0 + ka_1 + ka_2 + ka_3, ka_0 - ka_1 + ka_2 - ka_3, ka_0 + 2ka_1 + 4ka_2 + 8ka_3) = k(a_0, a_0 + a_1 + a_2 + a_3, a_0 - a_1 + a_2 - a_3, a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3) = kF(p_1(t))$.

   Låt $S = (1, t, t^2, t^3)$ vara standardbasen till $P_3(\mathbf{R})$, då är:

$$[F]_S^S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

2. (2 p.) Bestäm $R(F)$. $det([F]_S^S = 12 \neq 0$ som ger att $rang([F]_S^S) = 4$. Det följer att $\dim(R(F)) = rang([F]_S^S) = 4$. Eftersom $R(F) \subseteq \mathbf{R}^4$ så är $R(F) = \mathbf{R}^4$.
3. (1 p.) Är F en isomorfi? F är linjär och F är surjektiv för att $R(F) = \mathbf{R}^4$. Eftersom $4 = nullity(F) + rang(F) = nullity(F) + 4$ så är $nulllity(F) = 0$. Detta betydet att F är injektiv. Slutsatsen är att F är in isomorfi för att den är bijektiv och linjär.