Matematiska Institutionen
KTH

Kontrolskrivning till kursen SF1604 i Linjär algebra, Oktober 16, 2009, 10:15-11:00.
Version A
Kursexaminator: Sandra Di Rocco

Minst 3 poäng ger godkänd och poängerna(3,4 eller 5) räknas som bonuspoäng till uppgift 1 i del 1 av tentamen.
Inget hjälpmedel tillåtet.
Allt som skrivs ska MOTIVERAS.

Uppgift Betrakta följande mängd:

$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R^4}, 2x - 3y + z = 3t, y + 4z - 6t = 0, x + 3t = 2y\}$$

1. (1 p.) Visa att W är ett delrum till $\mathbf{R^4}$.
2. (3 p.) Bestäm en bas till W, och $\dim(W)$.
3. (1 p.) Bestäm alla delrum till W.

Lösning:

1. W är lösningsmängden till det följande homogena systemet:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 3t &= 0 \\ y + 4z - 6t &= 0 \\ x - 2y + 3t &= 0 \end{cases}$$

Det vill säga att $W = \{\vec{v} \in \mathbf{R}^4, A\vec{v} = \vec{0}\}$ där $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Lösningsmängder till homogena system i 4 variabler är delrum till $\mathbf{R}^4$. (Bevisad under föreläsning så det behövs inte visas här).

2. Gauss eliminering ger:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Det följer att $W = \{(17k, 10k, -k, k), k \in \mathbf{R}\} = Span(17, 10, -1, 1)$. Då är $\vec{v} = (17, 10, -1, 1)$ en bas till W. Eftersom har W en bas som består av en vektor så är $\dim(W) = 1$.

3. Om $D \subseteq W$ är ett delrum till W, så ska $\dim(D) \leq \dim(W)$. Det följer att $D = \{\vec{0}\} = \{(0, 0, 0, 0)\}$, eller $D = W$.