Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till lappskrivning nummer 5A till kursen Linjär algebra II för D, SF1604, den 2 mars 2010, kl 15.15-15.40.

Namn:

Resultat:

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkanda uppgifter nedan.

OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. För den linjära avbildningen B från R^3 till R^3 gäller att $B(1,1,1) = (2,1,0)$, $B(0,1,1) = (1,1,2)$ och $B(0,0,1) = (3,1,1)$. Bestäm avbildningens matris relativt standardbasen.

Lösning: Martins metod ger

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

så avbildningens matris relativt standardbasen blir

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Låt A vara en linjär avbildning från R^3 till R^3 sådan att $A(1,2,1) = (1,0,1)$ och $A(0,1,-1) = (1,1,1)$, samt $A(A(0,0,1)) = (0,0,0)$. Räcker denna information för att bestämma dimensionen av A:s kärna (dvs nollrum)? Motivera ditt svar!

Lösning: Ja informationen räcker ty vektorerna $(1,0,1)$ och $(1,1,1)$ tillhör bildrummet så bildrummets dimension är minst lika med 2. Enligt dimensionssatsen gäller då att

$$\dim(\ker(A)) = 3 - \dim(\mathrm{R}(A)) \leq 3 - 2.$$

Men villkoret $A(A(0,0,1)) = (0,0,0)$ ger att A måste avbilda någon vektor skild från nollvektorn på nollvektorn, så kärnan kan inte enbart bestå av nollvektorn. Alltså

$$1 \leq \dim(\ker(A)) \ ,$$

varav de bägge olikheterna ger $\dim(\ker(A)) = 1$.