Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till lappskrivning nummer 4B till kursen Linjär algebra II för D, SF1604, den 23 februari 2010, kl 15.15-15.40.

Namn:

Resultat:

Bonuspoäng till tentan från denna lappskrivning är antalet godkanda uppgifter nedan.

OBS Lösningarna skall motiveras väl och skrivas på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. (ON-system) Bestäm projektionen av vektorn $(1,1,2,2)$ på det delrum L till R^4 som genereras av vektorerna $(1,2,1,0)$ och $(1,-1,1,1)$, dvs $L = \text{Span}\{(1,2,1,0),(1,-1,1,1)\}$.

Lösning: De två generatorerna för L är ortogonala mot varandra och bildar därför en ortogonalbas för L. Vi får alltså

$$\text{Proj}_L((1,1,2,2)) = \frac{(1,1,2,2)\cdot(1,2,1,0)}{||(1,2,1,0)||^2}(1,2,1,0) + \frac{(1,1,2,2)\cdot(1,-1,1,1)}{||(1,-1,1,1)||^2}(1,-1,1,1) =$$

$$= \frac{5}{6}(1,2,1,0) + \frac{4}{4}(1,-1,1,1) = \frac{1}{6}(11,4,11,6).$$

SVAR: $\frac{1}{6}(13,8,13,13)$.

2. Låt $\bar{e}_1 = (1,0,0)$, $\bar{e}_2 = (0,1,0)$ och $\bar{e}_3 = (0,0,1)$ beteckna standardbasen i R^3. Bestäm en bas $\mathbf{f}$ bestående av basvektorerna $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$ och $\bar{f}_3$ för R^3 sådan att

$$\begin{aligned}
(3,2,1) &= \bar{f}_1 + 2\bar{f}_2\,, \\
(2,3,3) &= \bar{f}_1 + \bar{f}_2 + 2\bar{f}_3\,, \\
(1,2,1) &= \phantom{\bar{f}_1 +{}} \bar{f}_2 + \bar{f}_3\,,
\end{aligned}$$

dvs $(3,2,1)$ har koordinaterna $(1,2,0)$ i basen $\mathbf{f}$, $(2,3,3)$ har koordinaterna $(1,1,2)$ i basen $\mathbf{f}$ och $(1,2,1)$ har koordinaterna $(0,1,1)$ i basen $\mathbf{f}$.

Lösning: Givet är ett ekvationssystem för vektorer som vi löser med sedvanlig Gauss elimination:

$$\left\{\begin{array}{lcccccc}
(3,2,1) & = & \bar{f}_1 & + & 2\bar{f}_2 & & \\
(2,3,3) & = & \bar{f}_1 & + & \bar{f}_2 & + & 2\bar{f}_3 \\
(1,2,1) & = & & & \bar{f}_2 & + & \bar{f}_3
\end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{lcccccc}
(3,2,1) & = & \bar{f}_1 & + & 2\bar{f}_2 & & \\
(-1,1,2) & = & & & -\bar{f}_2 & + & 2\bar{f}_3 \\
(1,2,1) & = & & & \bar{f}_2 & + & \bar{f}_3
\end{array}\right. \sim$$

$$\sim \left\{\begin{array}{lcccccc}
(3,1,3) & = & \bar{f}_1 & + & 2\bar{f}_2 & & \\
(-1,1,2) & = & & & -\bar{f}_2 & + & 2\bar{f}_3 \\
(0,3,3) & = & & & & & 3\bar{f}_3
\end{array}\right.$$

Ur detta system får vi att $\bar{f}_3 = (0,1,1)$, $\bar{f}_2 = (1,1,0)$ och $\bar{f}_1 = (1,0,1)$.