Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till några övningar på egenvärden och egenvektorer till kursen linjär algebra SF1604 för D, vt 10.

1. Bestäm egenvärden och tillhörande egenvektorer för matriserna

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 9 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 11 & -2 & 0 \\ -2 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösning Egenvärdena till matrisen A utgöres av rötterna till ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$. Vi får:

$$0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 9-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & \lambda \\ 2 & 9-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 9-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\lambda \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 9-\lambda & 4 \\ 1 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(-1)((9-\lambda)(2-\lambda) - 8) = \lambda(-1)(\lambda^2 - 11\lambda + 10)$$

Denna ekvation har rötterna 0, 1 och 10. Egenvektorer hörande till egenvärdet λ är lösningarna till systemet

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 9-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

För $\lambda = 0$ har systemet lösningen $(x_1, x_2, x_3) = t(1, 0, -1)$, för $\lambda = 1$ får vi med hjälp av Gausselimination lösningen $(x_1, x_2, x_3) = t(2, -1, 2)$ och för $\lambda = 10$ får vi lösningen $(x_1, x_2, x_3) = t(1, 4, 1)$. Egenvektorerna är alltså av de så kallade egenrummen $E_0 = span\{(1, 0, -1)\}$, $E_1 = span\{(2, -1, 2)\}$ och $E_{10} = span\{(1, 4, 1)\}$.

Med liknande kalkyler finner vi att matrisen B har egenrummen $E_{-1} = span\{(1, 0, 1)\}$, $E_0 = span\{(-1, 1, 1)\}$ och $E_3 = span\{(1, 2, -1)\}$, samt att matrisen C har egenrummen $E_0 = span\{(0, 0, 1)\}$, $E_{10} = span\{(2, 1, 0)\}$ och $E_{15} = span\{(1, -2, 0)\}$

2. Gör en s.k. ortogonal diagonalisering av matrisen

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösning: Vi bestämmer först matrisens egenvärden:

$$0 = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 4 \\ 4 & 1-\lambda & -8 \\ 4 & -8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & 1-\lambda & -9+\lambda \\ 4 & -8 & 9-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda) \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 0 \\ 4 & 1-\lambda & -1 \\ 4 & -8 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(9-\lambda) \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 0 \\ 8 & -7-\lambda & 0 \\ 4 & -8 & 1 \end{vmatrix} = (9-\lambda)[(7-\lambda)(-7-\lambda) - 32] = (9-\lambda)[\lambda^2 - 81]$$

ger egenvärdena $\lambda = 9$ (dubbelrot) och $\lambda = -9$. Egenvektorer hörande till egenvärdet $\lambda = 9$ blir, med liknande kalkyler som de i uppgift 1, $(x_1, x_2, x_3) = t(-1, 2, 2)$. När vi beräknar egenvektorer hörande till egenvärdet $\lambda = -9$ skall vi lösa ekvationen

$$-x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \ ,$$

som ju har lösningsmängden $(x_1, x_2, x_3) = t(2, 1, 0) + s(2, 0, 1)$.

För att genomföra den ortogonala diagonaliseringen behöver vi en ON-bas av egenvektorer. Men egenrummet E_9 ligger ortogonalt mot egenrummet E_{-9}, så varje vektor ortogonal mot $(-1, 2, 2)$, dvs ortogonal mot E_{-9}, kommer att tillhöra egenrummet E_9 och vara en egenvektor hörande till egenvärdet $\lambda = -9$.

Vi normerar nu vektorn $(-1, 2, 2)$ och får vektorn $e_1 = \frac{1}{3}(-1, 2, 2)$ som är en egenvektor hörande till egenvärdet $\lambda = -9$.

Som egenvektorer hörande till egenvärdet $\lambda = 9$ kan vi välja vilka vektorer som helst som är ortogonala mot e_1. De tillhör ju ortogonala komplementet till E_-9, vilket ju är egenrummet E_9. Vi väljer, bl a för att få ”lätta” siffror $e_2 = \frac{1}{3}(2, -1, 2)$ och $e_3 = \frac{1}{3}(2, 2, -1)$. (Vi kunde också tagit $f_2 = (2, 1, 0)$ och $f_3 = (-1, 2, 2) \times (2, 1, 0)$ och sedan normerat f_2 och f_3, men då hade vi fått andra vektorer.)

Diagonaliseringen ges av att $A = QDQ^T$ där Q:s kolonner utgöres av den funna ON-basen och diagonalelementen i matrisen D är egenvärdena, i samma ordning som tillhörande egenvektorer uppträder i matrisen D:

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}^T$$

3. Bestäm A^n när

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lösning På sedvanligtsätt, med kalkyler som i uppgift 1, bestämms egenvärden och egenvektorer. Matrisen A har egenvärden 1 och 2 med tillhörande egenvektorer $(2, -1)$ respektive $(3, -1)$. Med

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

så får vi att

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1},$$

varur vi sluter att

$$A^n = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1}\ldots P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} =$$

$$= P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}I\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}I\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}I\ldots I\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}P^{-1} =$$

$$= P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n P^{-1} = P\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}P^{-1}.$$

OBSERVERA Eftersom matrisen inte är symmetrisk kan vi inte göra en s k ortogonal diagonalisering.

4. Matrisen $\mathbf{A}$ har egenvektorerna $(1\ 2\ -1)^T$, $(2\ 1\ 1)^T$ och $(1\ 0\ 1)^T$ hörande till egenvärdena 2, 3, -1 respektive. Bestäm $\mathbf{A}(4\ 3\ 1)^T$.

   Lösning: Vi skriver först vektorn $(4, 3, 1)$ som en linjärkombination av egenvektorerna:

$$(4, 3, 1) = x_1(1, 2, -1) + x_2(2, 1, 1) + x_3(1, 0, 1)$$

   Man finner, efter att ha löst systemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 = 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

   att $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ och $x_3 = 1$. Dvs

$$(4, 3, 1) = (1, 2, -1) + (2, 1, 1) + (1, 0, 1)$$

   Vi applicerar nu matrisen $\mathbf{A}$ och får då:

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) =$$

$$= \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mathbf{A}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5. En symmetrisk 3×3-matris har egenvärdena -1, -1 och 1. En egenvektor hörande till egenvärdet 1 är $(0, -1, 1)^T$. Bestäm matrisen A.

   Lösning: Egenvärdet $\lambda = 1$ är ett nollställe med multipliciteten 1 till ekvationen $\det(A - \lambda I) = 0$ och enligt sats 7.2.4 i läroboken har då egenrummet E_1 dimension 1. Således

$$E_1 = span\{(0, -1, 1)^T\}.$$

   Matrisens övriga egenvektorer bildar enligt spektralsatsen, eftersom matrisen är symmetrisk, ett egenrum E_{-1} som ligger ortogonalt mot vektorn $(0, 1, -1)$. Vektorerna $(1, 0, 0)$ och $(0, 1, 1)$ tillhör E_{-1} eftersom de är ortogonala mot $(0, 1, -1)$.

   (Vi kan ta vilka två icke parallella vektorer som helst som är ortogonala mot $(0, -1, 1)$. Istället för $(1, 0, 0)$ och $(0, 1, 1)$ hade vi t ex kunnat välja $(1, 1, 1)$ och $(2, 1, 1)$.)

   Matrisen A kan diagonaliseras enligt

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

   Beräkning av invers och ihopmultiplicering av matriserna ger

   SVAR:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Matrisen $\mathbf{A}$ är symmetrisk och har bl a egenvektorerna $(1, 1, 1)$ och $(1, -2, -1)$. Bestäm samtliga egenvektorer till matrisen $\mathbf{A}$.

   Lösning: Då matrisen är symmetrisk så är egenvektorer hörande till skilda egenvärden ortogonala mot varandra. Egenvektorerna $(1, 1, 1)$ och $(1, -2, -1)$ är inte ortogonala mot varandra och måste då höra till samma egenvärde och spänna upp ett egenrum av dimension 2.

Matrisen är uppenbarligen av formatet 3×3 och till den hör en ortogonalbas av egenvektorer. En tredje egenriktning $\bar{e}_1$ ges av en vektor ortogonal mot de givna två vektorerna t ex

$$\bar{e}_3 = (1,1,1) \times (1,-2,-1) = (1,2,-3).$$

SVAR. $span\{(1,1,1),(1,-2,-1)\}$ resp $span\{(1,2,-3)\}$