Matematiska Institutionen
KTH

Lösning till tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II, SF1604, den 15 mars 2010 kl 14.00-19.00.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Bonuspoäng: Bonuspoäng erhållna från lappskrivningar till kursen för D under vt10 adderas till skrivningspoängen. Generellt gäller att bonuspoäng får användas vid ordinarie tentamen och vid första ordinarie omtentamenstillfälle för respektive sektion, vilket för sektion F liksom för sektion D är den 5 juni i år.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

1. Låt $\mathbf{A}$ beteckna matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lös följande matrisekvationer

$$a)\ (1p)\ \ \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad b)\ (2p)\ \ \mathbf{X}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad c)\ (2p)\ \ (\mathbf{A}^{-1})^2\,\mathbf{X}\,\mathbf{A}^T = \mathbf{I}\,,$$

där $\mathbf{I}$ betecknar identitetsmatrisen och $\mathbf{A}^T$ betecknar den till $\mathbf{A}$ transponerde matrisen.

Lösning:

Vi börjar med att beräkna inversen till matrisen $\mathbf{A}$.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 \end{array}\right) .$$

Så inversen till $\mathbf{A}$ är

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Vi multiplicerar med denna invers och får följande svar

a)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b)

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -4 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

För c) observerar vi att $\mathbf{A}$ är symmetrisk och givna ekvationen kan skrivas

$$(\mathbf{A}^{-1})^2 \, \mathbf{X} \, \mathbf{A} = \mathbf{I} .$$

En lösning är då uppenbarligen $\mathbf{X} = \mathbf{A}$. Eftersom $\mathbf{A}$ är inverterbar finns inga fler lösningar.

2. Låt nu $\mathbf{B}$ beteckna matrisen

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

(a) (1p) Bestäm samtliga egenvärden till $\mathbf{B}$.

Lösning: Talet λ är ett egenvärde till den givna matrisen om och endast om $\det(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I}) = 0$, en ekvation som vi alltså har att lösa:

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 3 .$$

Denna ekvation har rötterna $\lambda = 1$ och $\lambda = 3$ vilka är matrisens egenvärden.

(b) (2p) Bestäm samtliga egenvektorer till $\mathbf{B}$.

Lösning: Egenvektorer hörande till egenvärdet λ är lösningarna till ekvationssystemet $(\mathbf{B} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

För $\lambda = 1$ får vi systemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$$

som ju har lösningsrummet, som således är egenrummet E_1 bestående av alla egenvektorer hörande till egenvärdet $\lambda = 1$:

$$E_1 = \text{span}\{(1 \ \ -1)^T\} .$$

På samma sätt får man egenrummet E_3 till

$$E_3 = \text{span}\{(1 \ 1)^T\} .$$

(c) (2p) Bestäm två olika matriser $\mathbf{Q}_1$ och $\mathbf{Q}_2$ samt en diagonalmatris $\mathbf{D}$, sådana att

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}_1\,\mathbf{D}\,\mathbf{Q}_1^T = \mathbf{Q}_2\,\mathbf{D}\,\mathbf{Q}_2^T \ .$$

(Man får en poäng om man bara hittar en matris $\mathbf{Q}_1$ som uppfyller ovanstående likhet.)

Lösning: Diagonalelementen i matrisen $\mathbf{D}$ är egenvärdena till matrisen $\mathbf{B}$, så vi låter

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Kolonnerna i $\mathbf{Q}_i$, $i = 1, 2$, utgöres av en ON-bas av egenvektorer. Vi normerar och finner ON-baser av egenvektorer:

$$\bar{e}_1 = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}})^T \ , \qquad \bar{e}_2 = \pm(\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}})^T$$

Totalt finns fyra möjliga matriser:

$$\mathbf{Q} = \pm\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \ , \qquad \text{resp} \qquad \mathbf{Q} = \pm\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

3. Vid nedanstående tre deluppgifter gäller att koordinaterna är givna relativt ett ON-system i R^3.

(a) (2p) Bestäm ekvationen för det plan π som innehåller punkterna $(1, 1, 1)$, $(1, -1, 0)$ och $(3, 3, 1)$.

Lösning: Vi bestämmer först en normalvektor till planet. Två vektorer paralella med planet är:

$$\bar{u} = (1, -1, 0) - (1, 1, 1) = (0, -2, -1) \ , \quad \text{resp} \quad \bar{v} = (3, 3, 1) - (1, 1, 1) = (2, 2, 0) \ .$$

En normlvektor till planet ges då av kryssprodukten av $\bar{u}$ med $\bar{v}$:

$$\bar{u} \times \bar{v} = ((-2)\cdot 0 - (-1)\cdot 2, (-1)\cdot 2 - 0\cdot 0, 0\cdot 2 - (-2)\cdot 2) = (2, -2, 4) \ .$$

Planets ekvation blir

$$2(x-1) - 2(y-1) + 4(z-1) = 0 \ ,$$

som hyfsas till ekvationen

Svar: Planets ekvation är $x - y + 2z = 2$.

(b) (1p) Avgör om punkten $(5, 2, 3)$ tillhör det plan π som beskrevs i uppgiften ovan.

Lösning: En punkt (a, b, c) tillhör planet om och endast om punktens koordinater satisfierar planets ekvation. Vi finner:

$$5 - 2 + 2\cdot 3 = 3 \neq 2 \ ,$$

så

Svar: Punkten i fråga tillhör inte planet.

(c) (2p) Ange på parameterform en valfri linje genom punkten $(2, 2, 2)$ och som är parallell med det ovan angivna planet π.

Lösning: En riktningsvektor för linjen skall vara vinkelrät mot planets normal $\bar{n} = (1, -1, 2)$. Vi kan ta vektorn $\bar{u} = (0, -2, -1)$ i deluppgift a) t ex. Parameterformen för en sökt linje skulle kunna vara

$$(x, y, z) = (2, 2, 2) + t(0, -2, -1) \ .$$

DEL II

4. Låt L beteckna det delrum till R^4, ON-system, som spänns upp av, genereras av, vektorerna $(1,1,1,1)$ och $(1,2,-3,1)$.

   (a) (2p) Bestäm en bas för ortogonala komplementet $L^\perp$ till L.

   Lösning: Ortogonala komplementet till givna delrummet utgöres av de vektorer (x_1,x_2,x_3,x_4) vars inre produkt med alla vektorer i L blir noll, och därför

$$\begin{cases} (x_1,x_2,x_3,x_4)\cdot(1,1,1,1) &= 0 \\ (x_1,x_2,x_3,x_4)\cdot(1,2,-3,1) &= 0 \end{cases}$$

   dvs

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \sim \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

   som har lösningarna $x_3 = t$, $x_4 = s$, $x_2 = 4t$ och $x_1 = -x_2 - x_3 - x_4 = -5t - s$, som vi skriver i vektorform

$$(x_1,x_2,x_3,x_4) = t(-5,4,1,0) + s(-1,0,0,1)\ .$$

   Således

$$L^\perp = \mathrm{span}\{(-5,4,1,0),(-1,0,0,1)\}\ .$$

   Då de två generatorerna $\bar{f}_1 = (-5,4,1,0)$ och $\bar{f}_2 = (-1,0,0,1)$ för $L^\perp$ inte är linjärt beroende utgör den en bas för $L^\perp$.

   (b) (2p) Bestäm en ortogonalbas för $L^\perp$.

   Lösning: Vi använder Gram-Schmidts metod. Låt $\bar{e}_1 = \bar{f}_2 = (-1,0,0,1)$ och låt

$$\bar{e}_2 = \bar{f}_1 - \frac{\bar{f}_1\cdot\bar{e}_1}{\bar{e}_1\cdot\bar{e}_1}\bar{e}_1 = (-5,4,1,0) - \frac{5}{2}(-1,0,0,1) = (-\frac{5}{2},4,1,-\frac{5}{2}) = \frac{1}{2}(-5,8,2,-5)\ .$$

   Hyfsar siffrorna och får till exempel följande
   Svar: En ortogonalbas för $L^\perp$ utgöres t ex av vektorerna $(-1,0,0,1)$ och $(-5,8,2,-5)$.

   (c) (1p) Bestäm en ON-bas för $L^\perp$.

   Lösning: Vi normerar ortogonalbasen ovan och får, då

$$||(-1,0,0,1)|| = \sqrt{(-1)^2+0^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}\ ,$$

   och

$$||(-5,8,2,-5)|| = \sqrt{(-5)^2+8^2+2^2+(-5)^2} = \sqrt{118}\ ,$$

   att
   Svar: En ON-bas för $L^\perp$ utgöres t ex av vektorerna $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,0,1)$ och $\frac{1}{\sqrt{118}}(-5,8,2,-5)$.

5. (5p) Utred för vilka värden på det reella talet a som det linjära spannet av vektorerna $(1,2,1,2)$, $(2,a,2,a)$, $(1,a,a,a)$ och $(0,0,0,a)$ har dimension 0, 1, 2, 3 respektive 4.

Lösning: Det linjära spannet har dimension 4 om och endast om matrisen vars kolonner utgöres av de givna vektorerna har rang 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & a & a & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 2 & a & a & a \end{pmatrix}$$

eller ekvivalent, eftersom matrisen är en 4×4-matris, att determinanten nedan är skilt från noll, dvs

$$0 \neq \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & a & a & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 2 & a & a & a \end{vmatrix}$$

Vi utvecklar determinanten efter sista kolonnen och får

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & a & a & 0 \\ 1 & 2 & a & 0 \\ 2 & a & a & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & a & a \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & a-4 & a \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a(a-4) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a(a-4)(a-1) \ .$$

För alla reella tal a sådana att a inte är något av talen 0, 1 eller 4 gäller att matrisen, och därmed det linjära spannet har dimension 4

Vi undersöker nu för vart och ett av dessa tre värden på a dimensionen hos det linjära spannet.

För $a = 0$ får vi ett delrum till R^4 som genereras av $(1, 2, 1, 2)$, $(2, 0, 2, 0)$ och $(1, 0, 0, 0)$. Det är uppenbart att dessa vektorer är linjärt oberoended, och att dimensionen i detta fall därför är tre.

För $a = 1$ har vi att vektorerna $(1, 2, 1, 2)$, $(1, 1, 1, 1)$ och $(0, 0, 0, 1)$ är linjärt oberoende. Det linjära spannets dimension är då minst tre,men kan ju enligt ovan inte vara lika med fyra. Så även i detta fall, dvs $a = 1$ är dimensionen av det linjära höljet lika med tre.

Liknande resonemang i fallet $a = 4$ ger ett rum av dimension tre.

6. (5p) Visa att för varje linjär avbildning A från R^n till R^n gäller att

   $$\dim(\ker(A)) \leq \dim(\ker(A^2)) \ ,$$

   där $\ker(A)$ betecknar kärnan ("the kernel") till A och A^2 betecknar sammansättning av A med sig själv, dvs $A^2(\bar{x}) = A(A(\bar{x}))$ eller med ett alternativt beteckningssätt $A \circ A$.

   Lösning: Det räcker att visa att varje vektor i $\ker(A)$ också tillhör $\ker(A^2)$, ty då gäller att $\ker(A)$ är innehållet i $\ker(A^2)$ och då av en dimension högst lika med $\dim(\ker(A^2))$.

   Vi får nu

   $$\bar{x} \in \ker(A) \ \Rightarrow \ A(\bar{x}) = \bar{0} \ \Rightarrow \ A(A(\bar{x})) = A(\bar{0}) = \bar{0} \ \Rightarrow \ A^2(\bar{x}) = \bar{0} \ \Rightarrow \ \bar{x} \in \ker(A^2) \ .$$

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

7. Vi betraktar ett rätvinkligt koordinatsystem i den 4-dimensionella rymden och i vilken vi har samma längdskala på de fyra koordinataxlarna.

(a) (1p) Visa att origo tillsammans med de tre punkterna $(1,1,1,1)$, $(2,3,0,-1)$ och $(3,4,1,0)$ bildar de fyra hörnen i en parallellogram.

Lösning: Vi har att visa att de fyra sidorna är parvis lika, dvs beskrivs av samma vektor. Låt O beteckna origo och P, Q och R de tre övriga punkterna i ovan angiven ordning. Vi får

$$PR = (3,4,1,0) - (1,1,1,1) = (2,3,0,-1) = OQ \ ,$$

och

$$QR = (3,4,1,0) - (2,3,0,-1) = (1,1,1,1) = OP \ .$$

Vilket bekräftar att fyrhörningen är ett parallellogram.

(b) (2p) Motivera hur arean av en plan yta skulle kunna definieras och beräkna arean av parallellogrammet ovan.

Lösning: Vi definierar arean som ”basen gånger höjden”. Vi finner med OP som basen att höjden ges av vektorn

$$\bar{h} = OQ - \mathrm{Proj}_{OP}(OQ) = (2,3,0,-1) - \frac{OQ \cdot OP}{OP \cdot OP}(1,1,1,1) =$$

$$= (2,3,0,-1) - \frac{4}{4}(1,1,1,1) = (1,2,-1,-2) \ .$$

Så arean blir

Svar: $||(1,1,1,1)|| \cdot ||(1,2,-1,-2)|| = 2\sqrt{10}$.

(c) (2p) Betrakta nu den parallellepiped i den 4-dimensionella rymden vars ena sidoyta består av parallellogrammet ovan, samt i vilken det går en kant från origo till punkten $(3,2,1,1)$. Bestäm volymen av denna parallellepiped.

Lösning: Volymen definierar vi som ”arean av basytan gånger höjden”. För att få höjden $\bar{h}$ projicerar vi vektorn $(3,2,1,1)$ på det plan π som spänns upp av OP och OQ. Vi får, eftersom $(1,1,1,1)$ och $(1,2,-1,-2)$ utgör en ortogonalbas för π att $\bar{h}$ blir lika med

$$(3,2,1,1) - \frac{(3,2,1,1)\cdot(1,1,1,1)}{(1,1,1,1)\cdot(1,1,1,1)}(1,1,1,1) - \frac{(3,2,1,1)\cdot(1,2,-1,-2)}{(1,2,-1,-2)\cdot(1,2,-1,-2)}(1,2,-1,-2)$$

eller förenklat

$$\bar{h} = (3,2,1,1) - \frac{7}{4}(1,1,1,1) - \frac{4}{10}(1,2,-1,-2) = \frac{1}{20}(17,-11,-7,9) \ .$$

Denna vektor har längden

$$||\bar{h}|| = \frac{1}{20}\sqrt{17^2 + (-11)^2 + (-7)^2 + 9^2} = \frac{1}{20}\sqrt{540} \ .$$

Nu får vi till slut att volymen blir

$$2\sqrt{10}\frac{1}{20}\sqrt{540} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6} \ .$$

8. (a) (2p) Bestäm en matris $\mathbf{A}$ vars determinant är lika med noll och som är sådan att

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \ . \tag{1}$$

Lösning: Se nedan

(b) (2p) Finns det för varje reellt tal r en matris $\mathbf{A}$ vars determinant är lika med r och som uppfyller de bägge likheterna i ekvation (1) ?

Lösning: Då

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \,,$$

finner vi att vektorerna $(1,3,-2)$, $(1,1,1)$ och $(0,1,0)$ utgör en bas för R^3. Om Vi lägger ytterligaare följande villkor på matrisen $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix}$$

kan vi lösa ut matrisen $\mathbf{A}$ entydigt eftersom

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & r \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

ger

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & r \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} .$$

Vi beräknar nu determinanten för $\mathbf{A}$:

$$\det(\mathbf{A}) = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & r \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= r \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= -r \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= -r \cdot \det(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}) = -r\det(\mathbf{I}) = -r \,.$$

Så alla värden kan vi få till determinanten av matrisen $\mathbf{A}$.

(c) (1p) Vi antar nu att koordinaterna är givna i ett ON-system. Finns det någon ortogonalmatris $\mathbf{A}$ som uppfyller de två likheterna i ekvation (1) ?

Lösning: Nej, om $\mathbf{A}$ skulle vara en ortogonalmatris skulle gälla att för varje vektor $\bar{u}$ att

$$||\mathbf{A}\bar{u}^T|| = ||\bar{u}^T|| \,.$$

Men uppenbarligen är ju $||(1,1,1)|| = \sqrt{3} \neq \sqrt{14} = ||(3,2,-1)||$