

Matematiska Institutionen  
KTH

**Lösning till tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II, SF1604 för D, den 5 juni 2010 kl 09.00-14.00.**

**Examinator:** Olof Heden.

**Hjälpmedel:** Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

**Betygsgränser:** (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

**Bonuspoäng:** Bonuspoäng erhållna från lappskrivningar till kursen för D under vt10 adderas till skrivningspoängen.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

## DEL I

1. I vår vanliga 3-dimensionella rymd (ON-system):

(a) (1p) Bestäm längden av vektorn  $(7, 4, 3)$ .

**Lösning**  $\|(7, 4, 3)\| = \sqrt{7^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{74}$

(b) (1p) Bestäm vinkeln mellan vektorerna  $(1, -1, 1)$  och  $(2, 3, 1)$ .

**Lösning** Då  $(1, -1, 1) \cdot (2, 3, 1) = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 1 = 0$  så är vinkeln 90 grader.

(c) (1p) Bestäm  $(1, 2, 3) \times (2, 1, 0)$ .

**Lösning**  $(1, 2, 3) \times (2, 1, 0) = (2 \cdot 0 - 3 \cdot 1, 3 \cdot 2 - 1 \cdot 0, 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2) = (-3, 6, -3)$ .

(d) (1p) Bestäm ekvationen för ett plan  $\pi$  som förutom origo innehåller punkterna  $(1, 2, 3)$  och  $(2, 1, 0)$ .

**Lösning** En normalvektor till planet ges av  $(1, 2, 3) \times (2, 1, 0)$  och som enligt föregående deluppgift är  $(-3, 6, -3)$ . Planets ekvation blir då

**SVAR:**  $-3(x - 0) + 6(y - 0) - 3(z - 0) = 0$ , eller hyfsat  $x - 2y + z = 0$ .

(e) (1p) Bestäm parameterformen för en linje genom punkten  $(3, 2, 1)$  och som är parallell med planet  $\pi$  i föregående deluppgift.

**Lösning** En vektor parallell med planet är t ex vektorn från origo till punkten  $(1, 2, 3)$ , dvs vektorn  $(1, 2, 3)$ . Planets parameterform blir då

**SVAR:**  $(x, y, z) = (3, 2, 1) + t(1, 2, 3)$ , (som ju inte är det enda svaret).

2. (a) (2p) Visa att vektorerna  $\bar{e}_1 = (3, 1, 1)$ ,  $\bar{e}_2 = (2, 0, 1)$  och  $\bar{e}_3 = (2, 1, 2)$  utgör en bas för  $\mathbb{R}^3$  och att  $\bar{f}_1 = (1, 1, 1)$ ,  $\bar{f}_2 = (2, 1, 3)$  och  $\bar{f}_3 = (2, 1, 2)$  utgör en annan bas för  $\mathbb{R}^3$ .

**Lösning** Tre vektorer i  $\mathbb{R}^3$  är en bas för  $\mathbb{R}^3$  om och endast om determinanten, med dessa tre vektorer som kolonner, är skild från noll. Vi finner att

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$$

och

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

- (b) (2p) Det finns ju en matris  $\mathbf{T}$  sådan att om en godtycklig vektor  $\bar{v}$  har koordinaterna  $(x_1, x_2, x_3)$  i basen  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  och koordinaterna  $(y_1, y_2, y_3)$  i basen  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$  så gäller

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Bestäm matrisen  $\mathbf{T}$ .

**Lösning** Vi finner sambandet

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

varur vi sluter att

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Sedvanlig matrisinvertering ger

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] &\sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] &\sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -3 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] &\sim \\ \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] &\sim \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & -4/3 & 1/3 \end{array} \right] &\sim \end{aligned}$$

Den sökta matrisen  $\mathbf{T}$  blir nu

$$\mathbf{T} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

- (c) (1p) Antag att  $\bar{v}$  har koordinaterna  $(1, -1, 2)$  i basen  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ . Bestäm  $\bar{v}$ 's koordinater  $(y_1, y_2, y_3)$  i basen  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3$ .

**Lösning** Uppenbarligen gäller

$$\bar{v} = (3, 1, 1) - (2, 0, 1) + 2(2, 1, 2) = (5, 3, 4) = y_1(1, 1, 1) + y_2(2, 1, 3) + y_3(2, 1, 2),$$

varur vi får systemet

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 2y_3 = 5 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 3 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 = 4 \end{cases}$$

som lätt löses med Gausselimination, och man får

**SVAR:**  $(y_1, y_2, y_3) = (1, -1, 3)$

3. (5p) Visa med hjälp av ett induktionsbevis att  $2^{6n} - 1$  är jämnt delbart med 7 för alla naturliga tal  $n = 1, 2, 3, \dots$

**Lösning** Påståendet är sant för  $n = 1$  ty  $2^6 - 1 = 63$  som ju är delbart med 7. Vi visar nu att om 7 delar  $2^{6n} - 1$  så kommer 7 att dela  $2^{6(n+1)} - 1$ . Så vi förutsätter att  $2^{6n} - 1 = 7k$  för något heltal  $k$ . Vi får då

$$2^{6(n+1)} - 1 = 2^{6n} 2^6 - 1 = (7k + 1)2^6 - 1 = 7k \cdot 2^6 + 63 = 7(k \cdot 2^6 + 9),$$

dvs talet 7 kommer att dela talet  $2^{6(n+1)} - 1$ .

Enligt induktionsprincipen är nu påståendet visat för  $n = 1, 2, 3, \dots$

## DEL II

4. Låt **A** och **B** vara nedanstående matriser

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

- (a) (2p) Visa att det inte finns någon matris **X** sådan att

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}.$$

**Lösning** Enklast är kanske att ansätta en matris **X**:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

Vi får då två linjära ekvationssystem att lösa

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 3 \\ 7x_1 + 8x_2 + 9x_3 = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 3 \\ 4y_1 + 5y_2 + 6y_3 = 3 \\ 7y_1 + 8y_2 + 9y_3 = 3 \end{cases}$$

med samma koefficientmatris, så vi kan lösa dem simultant i en tablå

$$\left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 3 & 3 \\ 7 & 8 & 9 & 5 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -9 \\ 0 & -6 & -12 & 5 & -18 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & 3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Så vi ser från sista raden att systemet är olösbart eftersom summan av inga  $x_1, x_2$  och  $x_3$  aldrig kan bli  $-1$ .

- (b) (2p) Om du byter ut elementet i en av matrisen  $\mathbf{B}$ 's 6 positioner mot ett annat visst tal  $b$ , så går ekvationen ovan att lösa. I vilken position  $(i, j)$  skall elementet ersättas mot vilket tal  $b$

**Lösning** Systemet hade varit lösbart om vi istället hade fått en nolla i sista raden och kolonn nummer fyra. Detta hade inträffat om vi t ex hade ersatt elementet 5 i rad nummer tre och kolonn nummer 1 i matrisen  $\mathbf{B}$  med 6.

- (c) (1p) Du kan ta vilken som helst av de nio positionerna i matrisen  $\mathbf{A}$  och ersätta elementet i den positionen med ett annat tal och då kommer systemet  $\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{B}$  att vara lösbart. Motivera varför.

**Lösning** Vi visar att om vi gör ett sådant byte så kommer determinanten av matrisen  $\mathbf{A}$  att vara skild från noll. Och då är systemet lösbart med  $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ .

Vi ersätter nu elementet  $a_{ij}$  i rad  $i$  och kolonn  $j$  med elementet  $b = a_{i,j} + b'$  där  $b' \neq 0$  och får en ny matris  $\mathbf{A}'$ . Vi utvecklar determinanten efter rad  $i$  och får, med  $A_{ij}$  betecknade algebraiska komplementen i  $\mathbf{A}$

$$\det(\mathbf{A}') = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3} + b'A_{ij} = \det(\mathbf{A}) + b'A_{ij} = 0 + b'A_{ij}.$$

Det är lätt att kontrollera att samtliga nio algebraiska komplement  $A_{i,j}$  är skilda från noll, och alltså, för varje  $b' \neq 0$  så  $\det(\mathbf{A}') \neq 0$ .

5. (5p) Bestäm matrisen, relativt standardbasen, för en linjär avbildning i vår vanliga 3-dimensionella rymd som avbildar planet med ekvationen  $x + y - z = 0$  på planet med ekvationen  $3x + y + z = 0$  samt linjen med parameterformen  $(x, y, z) = t(1, 1, 1)$  på linjen med parameterformen  $(x, y, z) = t(1, 2, -1)$ .

**Lösning** Beteckna den linjära avbildningen med  $A$ . Linjerna går genom origo, och avbildas då på varandra om linjernas riktningsvektorer avbildas på varandra, eller mer precist om

$$A(1, 1, 1) = (1, 2, -1).$$

Nu kommer alla punkter på den ena linjen att avbildas på den andra linjen, ty

$$A(t(1, 1, 1)) = tA(1, 1, 1) = t(1, 2, -1).$$

På samma sätt hanterar vi de bägge planen. Planet  $x + y - z = 0$  har riktningsvektorer  $(1, 0, 1)$  och  $(0, 1, 1)$  och planet  $3x + y + z = 0$  har riktningsvektorer  $(1, 0, -3)$  och  $(0, 1, -1)$  så vi kan t ex välja

$$A(1, 0, 1) = (1, 0, -3), \quad A(0, 1, 1) = (0, 1, -1).$$

Den sökta matrisen erhålls nu med hjälp av Martins metod:

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

Eftersom raderna till vänster om strecket i matrisen ovan är standardbasen, och vektorerna till höger om strecket är bilderna av dessa vektorer får vi nu

**SVAR:** Till exempel

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

6. (5p) Avgör om den kvadratiske formen

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 2yz + 2z^2$$

är positivt definit.

**Lösning** Vi skriver den kvadratiske formen

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 2yz + 2z^2 = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Tecknet på egenvärdena till matrisen ovan avgör om matrisen är positivt definit. Så vi löser den karaktersistiska ekvationen

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ \lambda-2 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(\lambda-2) \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda^2 - 3\lambda). \end{aligned}$$

Så egenvärdena till matrisen är 0, 2 och 3, varför den kvadratiske formen inte är positivt definit (den är positivt semidefinit).

## DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigtvis ordagrant, där de används i lösningen.

7. (5p) Med hjälp av kunskaper från gymnasiet kurser Matematik A, B, C och D samt de verktyg du har fått med dig från kursen i Linjär algebra, skall du bestämma de reella tal  $a$  och  $b$  som gör värdet av integralen nedan så litet som möjligt:

$$\int_0^1 (t^3 - a - bt)^2 dt.$$

**Lösning** Vi betraktar vektorrummet av funktioner kontinuerliga på intervallet 0 till 1, med den inre produkten

$$\langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Med

$$\|f\|^2 = \langle f | f \rangle = \int_0^1 f(t)^2 dt,$$

har vi alltså till uppgift att bestämma  $a$  och  $b$  så att  $\|t^3 - (a + bt)\|$  blir så liten som möjligt, vilket inträffar när  $a + bt$  är projektionen av  $t^3$  på  $L = \text{span}\{1, t\}$ . Vi söker alltså denna projektion.

Betsämmer först en ortogonalbas för  $L$ . Låter vi  $\bar{e}_1 = 1$  och

$$\bar{e}_2 = t - \text{Proj}_{\bar{e}_1}(t) = t - \frac{\langle t | 1 \rangle}{\langle 1 | 1 \rangle} 1 = t - \frac{\int_0^1 t \cdot 1 dt}{\int_0^1 1 \cdot 1 dt} 1 = t - \frac{1/2}{1} 1 = t - \frac{1}{2}.$$

Nu har vi en ortogonalbas för  $L$  och finner enligt känd formel

$$\text{Proj}_L(t^3) = \frac{\langle t^3 | \bar{e}_1 \rangle}{\langle \bar{e}_1 | \bar{e}_1 \rangle} \bar{e}_1 + \frac{\langle t^3 | \bar{e}_2 \rangle}{\langle \bar{e}_2 | \bar{e}_2 \rangle} \bar{e}_2 = \frac{\int_0^1 t^3 \cdot 1 dt}{\int_0^1 1 \cdot 1 dt} \cdot 1 + \frac{\int_0^1 t^3 \cdot (t-1/2) dt}{\int_0^1 (t-1/2) \cdot (t-1/2) dt} (t-1/2)$$

Vanlig integration av polynom ger nu

$$\text{Proj}_L(t^3) = \frac{1/4}{1} \cdot 1 + \frac{1/5 - 1/8}{1/3 - 1/4 + 1/4} (t-1/2) = \frac{1}{4} + \frac{9}{40} (t-1/2) = \frac{11}{80} + \frac{9}{40} t.$$

**SVAR:**  $a = 11/80$  och  $b = 9/40$ .

8. Matriserna i denna uppgift är samtliga kvadratiske  $n \times n$ -matriser.

- (a) (2p) Visa att om matrisen  $\mathbf{B}$  har full rang, dvs rangen för matrisen  $\mathbf{B}$  är  $n$ , så gäller för varje annan matris  $\mathbf{A}$  att matriserna  $\mathbf{AB}$  och  $\mathbf{BA}$  har samma rang.

**Lösning** Nollrummet till matrisen  $\mathbf{AB}$  består av de vektorer  $\bar{x}$  i  $\mathbb{R}^n$  sådana att  $\mathbf{B}\bar{x}^T$  tillhör nollrummet till matrisen  $\mathbf{A}$ . Om  $\mathbf{B}$  har full rang kommer nollrummet till  $\mathbf{AB}$  då att ha samma dimension som nollrummet till matrisen  $\mathbf{A}$ . Enligt dimensionssatsen så har då matriserna  $\mathbf{A}$  och  $\mathbf{AB}$  att ha samma rang.

Kolonnrummet till matrisen  $\mathbf{BA}$  består av vektorerna  $\mathbf{B}\bar{y}^T$  där  $\bar{y}$  tillhör kolonnrummet till matrisen  $\mathbf{A}$ . Eftersom  $\mathbf{B}$  har full rang, och inte "släcker ut några dimensioner" kommer dimensionen av kolonnrummet till matrisen  $\mathbf{BA}$  att vara lika med dimensionen hos kolonnrummet till matrisen  $\mathbf{A}$ . Enligt dimensionssatsen har då matriserna  $\mathbf{BA}$  och  $\mathbf{A}$  samma rang.

Eftersom tydligt matriserna  $\mathbf{BA}$  och  $\mathbf{AB}$  har samma rang som matrisen  $\mathbf{A}$  måste alla dessa ranger vara lika.

- (b) (1p) Bestäm två  $3 \times 3$ -matriser  $\mathbf{A}$  och  $\mathbf{B}$  sådana att matriserna  $\mathbf{AB}$  och  $\mathbf{BA}$  har olika rang.

**Lösning** Låt

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Då gäller

$$\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

som har rang 1, och

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

som har rangen 2.

- (c) (2p) Givet en godtycklig matris  $\mathbf{B}$ . Karaktärisera de matriser  $\mathbf{A}$  som är sådana att rangen för matrisen  $\mathbf{AB}$  är lika med rangen för matrisen  $\mathbf{BA}$ .

**Lösning:** För en godtycklig  $n \times n$ -matris  $\mathbf{C}$  låt  $N(\mathbf{C})$  beteckna matrisens nollrum och  $R(\mathbf{C})$  beteckna matrisens kolonnrum, dvs mängden av alla vektorer  $\bar{y}^T = \mathbf{C}\bar{x}^T$  där  $\bar{x}$  tillhör  $\mathbb{R}^n$ . Vi vet att matrisen  $\mathbf{C}$ :s rang är lika med dimensionen av  $R(\mathbf{C})$ , och enligt dimensionssatsen gäller att

$$\dim(R(\mathbf{C})) = n - \dim(N(\mathbf{C})).$$

Vi skall alltså karaktärisera de matriser  $\mathbf{A}$  sådana att

$$\dim(N(\mathbf{AB})) = \dim(N(\mathbf{BA})) .$$

För den skull visar vi först för två kvadratiska matriser  $\mathbf{C}$  och  $\mathbf{D}$ , vilka som helst att

$$\dim(N(\mathbf{CD})) = \dim(N(\mathbf{D})) + \dim(N(\mathbf{C}) \cap R(\mathbf{D})) .$$

För enkelhets skull betraktar vi de linjära avbildningar  $C$  och  $D$  av rummet  $\mathbb{R}^n$  på sig självt som kan representeras med matriserna  $\mathbf{C}$  resp  $\mathbf{D}$ .

Allmänt gäller för två linjära avbildningar  $C$  och  $D$  att  $\bar{x}$  tillhör nollrummet till  $CD$  om  $D(\bar{x})$  tillhör  $C$ 's nollrum.

Låt nu  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_k$  vara en bas för snittet av  $C$ 's nollrum och  $D$ 's bildrum, och låt  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k$  vara sådana att  $D(\bar{e}_i) = \bar{f}_i$ , för  $i = 1, 2, \dots, k$ . Eftersom vektorerna  $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \dots, \bar{f}_k$  är linjärt oberoende kommer också vektorerna  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_k$  att vara linjärt oberoende, eftersom

$$\lambda_1 \bar{e}_1 + \dots + \lambda_k \bar{e}_k = \bar{0} \implies \bar{0} = D(\bar{0}) = D(\lambda_1 \bar{e}_1 + \dots + \lambda_k \bar{e}_k) = \lambda_1 \bar{f}_1 + \dots + \lambda_k \bar{f}_k .$$

Vi utvidgar nu dessa vektorer till en bas för  $\mathbb{R}^n$  genom att lägga till vektorer, först med  $\bar{e}_{k+1}, \dots, \bar{e}_t$  som utgör en bas för nollrummet till  $D$  och sedan med  $\bar{e}_{t+1}, \dots, \bar{e}_n$  så att alla dessa vektorer bildar en bas för  $\mathbb{R}^n$ .

Betrakta nu en vektor  $\bar{x} = x_1 \bar{e}_1 + x_2 \bar{e}_2 + \dots + x_n \bar{e}_n$ . Då gäller att

$$CD(\bar{x}) = x_1 CD(\bar{e}_1) + x_2 CD(\bar{e}_2) + \dots + x_n CD(\bar{e}_n) = x_{t+1} CD(\bar{e}_{t+1}) + \dots + x_n CD(\bar{e}_n) .$$

Men vektorerna  $CD(\bar{e}_{t+1}), CD(\bar{e}_{t+2}), \dots, CD(\bar{e}_n)$  är linjärt oberoende, (ty om

$$\bar{0} = \lambda_{t+1} CD(\bar{e}_{t+1}) + \lambda_{t+2} CD(\bar{e}_{t+2}) + \dots + \lambda_n CD(\bar{e}_n) ,$$

så skulle

$$\bar{0} = CD(\lambda_{t+1} \bar{e}_{t+1} + \lambda_{t+2} \bar{e}_{t+2} + \dots + \lambda_n \bar{e}_n)$$

och då skulle  $\lambda_{t+1} \bar{e}_{t+1} + \lambda_{t+2} \bar{e}_{t+2} + \dots + \lambda_n \bar{e}_n$  tillhöra  $D$ 's nollrum och vore då en linjärkombination av vektorerna  $\bar{e}_{k+1}, \dots, \bar{e}_t$ , vilket strider mot att  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$  utgör en bas för  $\mathbb{R}^n$ .) Så

$$CD(\bar{x}) = \bar{0} \iff x_i = 0 \quad \text{för } i = t+1, t+2, \dots, n ,$$

eller ekvivalent

$$N(CD) = \text{Span}\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_k, \bar{e}_{k+1}, \dots, \bar{e}_t\}$$

varur följer att

$$\dim(N(\mathbf{CD})) = \dim(N(\mathbf{D})) + \dim(N(\mathbf{C}) \cap R(\mathbf{D})) ,$$

eftersom  $\dim(N(\mathbf{C}) \cap R(\mathbf{D})) = k$  och  $\dim(N(\mathbf{D})) = t - k$ .

Ur ovanstående likhet får vi nu att rangen för matriserna  $\mathbf{AB}$  och  $\mathbf{BA}$  är lika om

$$\dim(N(\mathbf{B})) + \dim(N(\mathbf{A}) \cap R(\mathbf{B})) = \dim(N(\mathbf{A})) + \dim(N(\mathbf{B}) \cap R(\mathbf{A}))$$