

Matematiska Institutionen  
KTH

Lösning till tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II, SF1604, den 17 april 2010 kl 09.00-14.00.

---

## DEL I

1. En triangel i den tredimensionella rymden har sina hörn i punkterna  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, 4, 3)$  och  $(3, 4, 1)$  (ON-system).

- (a) (2p) Bestäm längden av triangels samtliga sidor.

**Lösning:** Triangelns sidor är  $(2, 4, 3) - (1, 1, 1) = (1, 3, 2)$ ,  $(3, 4, 1) - (1, 1, 1) = (2, 3, 0)$  samt  $(2, 4, 3) - (3, 4, 1) = (-1, 0, 2)$ . Längden av en vektor  $(x, y, z)$  är

$$\|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

och vi får då

$$\|(1, 3, 2)\| = \sqrt{14}, \quad \|(2, 3, 0)\| = \sqrt{13}, \quad \|(-1, 0, 2)\| = \sqrt{5}.$$

- (b) (2p) Bestäm arean av triangeln.

**Lösning:** Arean av det parallelogram som spänns upp av två vektorer  $\vec{u}$  och  $\vec{v}$  är lika med  $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ . Formeln för beräkning av kryssprodukt ger nu att triangelns area blir

$$\frac{1}{2} \|(2, 3, 0) \times (-1, 0, 2)\| = \frac{1}{2} \|(6, -4, 3)\| = \frac{1}{2} \sqrt{61}.$$

- (c) (1p) Avgör om triangeln är en rätvinklig triangel, dvs om någon av vinklarna i triangeln är  $90^\circ$ .

**Lösning:** Om triangeln vore rätvinklig skulle dessa area vara lika med hälften av produkten av längderna av de sidor som bildar rät vinkel med varandra. Men två av talen  $\sqrt{14}$ ,  $\sqrt{13}$  och  $\sqrt{5}$  går inte att multiplicera till  $\sqrt{61}$ . Så triangeln kan inte vara rätvinklig.

2. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - ax_3 = 0 \end{cases}$$

- (a) (2p) Bestäm ett värde på talet  $a$  för vilket ekvationssystemet ovan har oändligt många lösningar.

**Lösning:** Vi utför Gauss elimination och räknar i tablå-form

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -a & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -a+2 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -a+6 & 0 \end{array} \right)$$

Det finns oändligt många lösningar när  $-a + 6 = 0$ , dvs  $a = 6$ .

- (b) (1p) Ange samtliga lösningar till systemet för det värde på talet  $a$  som du fann i deluppgiften ovan.

**Lösning:** Vi fortsätter med Gauss-Jordan i tablåräkningarna ovan:

$$\sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Till vilket värde  $t$  vi än väljer till  $x_3$ , dvs  $x_3 = t$ , hittar vi nu en lösning till systemet ovan nämligen

$$x_1 = -7t \quad x_2 = 4t,$$

så

**SVAR:**  $(x_1, x_2, x_3) = t(-7, 4, 1)$ .

- (c) (2p) Finns det något värde på det reella talet  $b$  för vilket systemet nedan har oändligt många lösningar

$$\begin{cases} bx_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + bx_2 = 0 \end{cases}$$

**Lösning:** Det homogena systemet har oändligt många lösningar precis då determinanten av systemets koefficientmatris är lika med noll. Vi finner att

$$\begin{vmatrix} b & -1 \\ 1 & b \end{vmatrix} = b^2 + 1.$$

Det finns inget reellt tal  $b$  som gör detta uttryck till noll. Så

**SVAR:** Nej.

3. För den linjära avbildningen  $A$  från  $R^3$  till  $R^3$  gäller att  $A(1, 1, 1) = (1, 2, -1)$ ,  $A(0, 2, 1) = (2, 1, 2)$  och  $A(1, 2, 2) = (0, 3, -4)$ .

- (a) (2p) Bestäm avbildningens matris relativt standardbasen.

**Lösning:** Vi använder den sk Martins metod, och räknar då enligt nedan:

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 3 & -4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

och till slut tablån

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & -8 \end{array} \right)$$

ur vilken bilden av standardbasen framgår så avbildningens matris relativt standardbasen blir

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -8 \end{pmatrix}$$

(b) (1p) Bestäm  $A(2, 1, 1)$ .

**Lösning:** Vi multiplicerar vektorn med matrisen ovan

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

så  $A(2, 1, 1) = (3, 3, 1)$ .

(c) (1p) Bestäm avbildningens kärna.

**Lösning:** Vi använder Martins metod även för detta. Utför vi Gausselimination till höger finner vi

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & | & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & | & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & | & 0 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & | & 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 & | & 0 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & | & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Så bildrummet spänns upp av vektorerna  $(1, 2, -1)$  och  $(0, -3, 4)$  och har dimension 2, varur, enligt dimensionssatsen, följer att kärnan har dimension 1. Ur tablån framgår att vektorn  $(-1, 2, 1)$  avbildas på nollvektorn, och därmed, då kärnans dimension är två, blir  $(-1, 2, 1)$  en bas för kärnan, så  $\ker(A) = \text{span}\{(-1, 2, 1)\}$ .

(d) (1p) Finns det någon vektor  $\bar{y}$  i  $R^3$  sådan att  $A(\bar{x}) \neq \bar{y}$  för alla  $\bar{x}$  i  $R^3$ .

**Lösning:** Ja, bildrummet har ju dimension 2, och är därmed ett "äkta" delrum till det 3-dimensionella rummet  $R^3$ , och då finns det ju vektorer som inte tillhör bildrummet, tex varje  $\bar{y}$  som inte tillhör  $\text{span}\{(1, 2, -1), (0, -3, 4)\}$ .

## DEL II

4. Låt  $L$  beteckna det delrum till  $R^4$  som spänns upp av (genereras av) vektorerna  $(0, 1, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 2, 1)$  och  $(0, 0, 1, 1)$  (ON-system)

(a) (3p) Bestäm projektionen av vektorn  $(1, 1, 1, 1)$  på  $L$ .

(b) (2p). Bestäm projektionen av  $(1, 1, 1, 1)$  på ortogonal komplementet till  $L$ .

**Lösning:** Vi löser först uppgift b). Ortogonal komplementet till  $L$  utgörs av lösningarna till ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

som ju är

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = t(1, 0, -1, 1),$$

så vi får

$$L^\perp = \text{span}\{(1, 0, -1, 1)\}.$$

Projektionen av den givna vektorn på  $L^\perp$  blir då enligt projektionsformeln

$$\text{Proj}_{L^\perp}((1, 1, 1, 1)) = \frac{(1, 1, 1, 1) \cdot (1, 0, -1, 1)}{(1, 0, -1, 1) \cdot (1, 0, -1, 1)}(1, 0, -1, 1) = \frac{1}{3}(1, 0, -1, 1).$$

Nu är det så att varje vektor  $\bar{w}$ , på ett unikt sätt, kan skrivas som en summa av en vektor  $\bar{u} \in L$  och en vektor  $\bar{v} \in L^\perp$ , där  $\bar{u}$  resp  $\bar{v}$  är vektorn  $\bar{w}$ 's projektion på  $L$  resp  $L^\perp$ :

$$(1, 1, 1, 1) = \text{Proj}_L(1, 1, 1, 1) + \text{Proj}_{L^\perp}(1, 1, 1, 1).$$

Eftersom vi nu känner projektionen av  $(1, 1, 1, 1)$  på  $L^\perp$  så får vi nu projektionen på  $L$ , som:

$$\text{Proj}_L((1, 1, 1, 1)) = (1, 1, 1, 1) - \frac{1}{3}(1, 0, -1, 1) = \frac{1}{3}(2, 3, 4, 2).$$

5. (a) (3p) Undersök om den kvadratiske formen

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

är positivt definit.

**Lösning:** Vi skriver den kvadratiske formen med hjälp av en symmetrisk matris  $\mathbf{A}$ :

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \mathbf{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Enligt känd sats är den kvadratiske formen positivt definit om och endast om samtliga egenvärden till matrisen  $\mathbf{A}$  är positiva. Vi vet att egenvärdena är nollställen till ekvationen  $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$ .

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda & 0 & -2 \\ 0 & 2 - \lambda & -2 \\ -2 & -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (4 - \lambda) \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -2 \\ -2 & 3 - \lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 - \lambda & -2 \end{vmatrix} = \\ = (4 - \lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 2) + 4(\lambda - 2) = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 9\lambda + 18)$$

Elementära lösningsmetoder av andragsgradsekvationer ger att detta polynom har nollställena 0, 3 och 6. Eftersom ett av matrisens egenvärden är noll, kan den kvadratiske formen inte vara positivt definit.

- (b) (2p) Visa att den kvadratiske formen

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2x_3,$$

är en indefinit kvadratisk form.

**Lösning:** Eftersom t ex

$$Q(1, 0, 0) = 1 > 0, \quad Q(0, 1, -1) = -1 < 0,$$

så antar den kvadratiske formen både positiva och negativa värden och är därför indefinit.

6. (5p) Visa med hjälp av ett induktionsbevis att talen i talföljden  $a_n = 2 \cdot 3^n + n^2$ , där  $n = 0, 1, 2, \dots$ , satisfierar rekursionsekvationen

$$a_{n+1} = 3a_n - 2n^2 + 2n + 1, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

med  $a_0 = 2$ .

**Lösning:** För det första finner vi att  $2 \cdot 3^0 + 0^2 = 2$  så  $a_0 = 2$  vilket ju är som det ska.

Nu visar vi nu, för tal  $a_n$  som satisfierar rekursionsekvationen, att

$$a_n = 2 \cdot 3^n + n^2 \quad \implies \quad a_{n+1} = 2 \cdot 3^{n+1} + n + 1^2 .$$

Om  $a_n = 2 \cdot 3^n + n^2$ , så

$$\begin{aligned} 3a_n - 2n^2 + 2n + 1 &= 3 \cdot 2 \cdot 3^n + 3n^2 - 2n^2 + 2n + 1 = \\ &= 2 \cdot 3^{n+1} + n^2 + 2n + 1 = 2 \cdot 3^{n+1} + (n + 1)^2 = a_{n+1} . \end{aligned}$$

Påståendet följer nu av induktionsprincipen.

## DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigtvis ordagrant, där de används i lösningen.

7. (a) (1p) Antag att  $3 \times 3$ -matrisen  $\mathbf{Q}$  är en ortogonalmatrix. Ange längden av vektorn  $\mathbf{Q}(0 \ 3 \ 4)^T$ , (ON-system).

**Lösning:** För varje ortogonalmatrix  $\mathbf{Q}$  gäller enligt sats i läroboken att

$$\|\mathbf{Q}\bar{x}^T\| = \|\bar{x}^T\| ,$$

och alltså

$$\|\mathbf{Q}(0 \ 3 \ 4)^T\| = \|(0 \ 3 \ 4)^T\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 .$$

- (b) (1p) En ortogonalmatrix kan ha högst två olika egenvärden. Ange dessa. Motivera!

**Lösning:** Egenvärdena till en ortogonalmatrix  $\mathbf{Q}$  är antingen 1 eller  $-1$ , ty från ovan får vi, för egenvärdet  $\lambda$  till  $\mathbf{Q}$  med egenvektorn  $\bar{x}^T$ , att

$$\|\bar{x}^T\| = \|\mathbf{Q}\bar{x}^T\| = \|\lambda\bar{x}^T\| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}^T\| ,$$

så  $|\lambda| = 1$ , vilket visar vårt påstående.

- (c) (3p) Ange, med motivering, samtliga symmetriska ortogonalmatriser som har egenvektorerna  $(1, 1, 1)$ ,  $(2, -1, -1)$  och  $(1, -1, 0)$ . (Poäng ges efter svarets kvalitet. Om du bara ger ett exempel på en sådan matrix som uppfyller alla givna krav får du t ex 1p.)

**Lösning:** Enligt sats i läroboken gäller för symmetriska matriser att egenvektorer som hör till skilda egenvärden är ortogonala. För de tre givna egenvektorerna gäller att  $\bar{u} = (2, -1, -1)$  och  $\bar{v} = (1, -1, 0)$  inte är ortogonala, medan  $\bar{w} = (1, 1, 1)$  är ortogonal mot de bägge andra. Så vektorerna  $(2, -1, -1)$  och  $(1, -1, 0)$  hör till samma egenvärde. Enligt uppgift b) kan egenvärdena vara 1 eller  $-1$ . Det finns nu fyra fall:

*Fall 1:* Samtliga egenvärden är 1 och  $\mathbf{Q}\bar{u}^T = \bar{u}^T$ ,  $\mathbf{Q}\bar{v}^T = \bar{v}^T$  och  $\mathbf{Q}\bar{w}^T = \bar{w}^T$ . Då är  $\mathbf{Q}$  lika med identitesmatrisen  $\mathbf{I}$ , vars kolonner utgör en ON-bas, och således är en ortogonalmatrix.

*Fall 2:* Samtliga egenvärden är  $-1$  och  $\mathbf{Q}\bar{u}^T = -\bar{u}^T$ ,  $\mathbf{Q}\bar{v}^T = -\bar{v}^T$  och  $\mathbf{Q}\bar{w}^T = -\bar{w}^T$ . Det är lätt att se att matrisen  $-\mathbf{I}$  är lika med  $\mathbf{Q}$  i detta fall, och även kolonnerna i  $-\mathbf{I}$  utgör ju en ON-bas.

Fall 3: I detta fall gäller  $\mathbf{Q}\bar{u}^T = \bar{u}^T$ ,  $\mathbf{Q}\bar{v}^T = \bar{v}^T$  och  $\mathbf{Q}\bar{w}^T = -\bar{w}^T$ . Vi bestämmer nu matrisen  $\mathbf{Q}$  med hjälp av Martins metod, där vi betraktar den linjära avbildning  $Q_3$  som matrisen  $\mathbf{Q}$  definierar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & | & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & | & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \\ \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & | & 0 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & | & 1 & -2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 & | & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & | & -2/3 & -2/3 & 1/3 \\ 3 & 0 & 0 & | & 1 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & | & 2/3 & -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

vilket ger matrisen

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

vilket ju är en symmetrisk ortogonalmatrix.

Fall 4: I detta fall gäller  $\mathbf{Q}\bar{u}^T = -\bar{u}^T$ ,  $\mathbf{Q}\bar{v}^T = -\bar{v}^T$  och  $\mathbf{Q}\bar{w}^T = \bar{w}^T$ . Vi kan nu bestämma matrisen  $\mathbf{Q}$  med hjälp av Martins metod, där vi betraktar den linjära avbildning  $Q_4$  som matrisen  $\mathbf{Q}$  definierar. Men vi observerar att denna linjära avbildning är lika med  $-Q_3$  så vi får direkt matrisen

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

utan att behöva använda Martins metod.

Vårt svar utgörs alltså av de fyra matriserna ovan:

**SVAR:**

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. (a) (1p) Låt  $\mathbf{A}$  beteckna en  $n \times n$ -matris vars kolonner är linjärt oberoende. Visa att för varje positivt heltal  $m$  så gäller att kolonnerna i matrisen  $\mathbf{A}^m$  är linjärt oberoende.

**Lösning:** Eftersom kolonnerna i  $\mathbf{A}$  är linjärt oberoende så är  $\mathbf{A}$ 's determinant  $r$  skild från noll, dvs  $r \neq 0$ . Prouktsatsen för determinanter, dvs  $\det(\mathbf{CD}) = \det(\mathbf{C})\det(\mathbf{D})$  ger nu

$$\det(\mathbf{A}^m) = (\det(\mathbf{A}))^m = r^m \neq 0.$$

Men att determinanten av  $\mathbf{A}^m$  är skild från noll innebär att dess kolonner är linjärt oberoende.

- (b) (2p) Låt  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$  och  $\bar{e}_4$  beteckna en bas för det 4-dimensionella vektorrummet  $V$ , och låt  $A$  beteckna den linjära avbildning för vilken

$$A(\bar{e}_1) = \bar{e}_2, A(\bar{e}_2) = \bar{e}_3, A(\bar{e}_3) = \bar{e}_4, A(\bar{e}_4) = \bar{0}.$$

Låt  $A^k$  beteckna  $A \circ A \circ A \circ \dots \circ A$ , ( $k$  stycken  $A : n$ ). Visa att

$$\dim(\ker(A)) = 1, \dim(\ker(A^2)) = 2, \dim(\ker(A^3)) = 3, \dim(\ker(A^4)) = 4.$$

**Lösning:** Låt  $\bar{x}$  vara en godtycklig vektor i  $V$ :

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 + x_4\bar{e}_4.$$

Vi får

$$A(\bar{x}) = x_1 A(\bar{e}_1) + x_2 A(\bar{e}_2) + x_3 A(\bar{e}_3) + x_4 A(\bar{e}_4) = x_1 \bar{e}_2 + x_2 \bar{e}_3 + x_3 \bar{e}_4 ,$$

så  $R(A) = \text{span}\{\bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ , och  $\dim(R(A)) = 3$ . Vidare

$$A^2(\bar{x}) = A(A(\bar{x})) = x_1 A(\bar{e}_2) + x_2 A(\bar{e}_3) + x_3 A(\bar{e}_4) = x_1 \bar{e}_3 + x_2 \bar{e}_4 ,$$

så  $R(A^2) = \text{span}\{\bar{e}_3, \bar{e}_4\}$ , och  $\dim(R(A)) = 2$ . Vidare

$$A^3(\bar{x}) = A(A^2(\bar{x})) = x_1 A(\bar{e}_3) + x_2 A(\bar{e}_4) = x_1 \bar{e}_4 ,$$

så  $R(A^2) = \text{span}\{\bar{e}_4\}$ , och  $\dim(R(A)) = 1$ . Och till slut

$$A^4(\bar{x}) = A(A^3(\bar{x})) = x_1 A(\bar{e}_4) = x_1 \bar{0} ,$$

så  $R(A^4) = \{\bar{0}\}$ , och  $\dim(R(A)) = 0$ . Vi använder nu dimensionssatsen

$$\dim(V) = \dim(\ker(A)) + \dim(R(A)) ,$$

varur påståendet följer omedelbart då  $\dim(V) = 4$ .

- (c) (2p) Är det sant för de linjära avbildningar  $A$  av ett  $n$ -dimensionellt vektorrum  $V$  på sig själv som är sådana att om

$$\dim(\ker(A)) = 1, \quad \dim(\ker(A^2)) = 2, \quad \dim(\ker(A^3)) = 3, \dots, \quad \dim(\ker(A^{n-1})) = n-1,$$

så gäller alltid att

$$\dim(\ker(A^n)) = n .$$

**Lösning:** Nej det är inte sant, ty definiera en linjär avbildning genom

$$A(\bar{e}_i) = \bar{e}_{i+1} \quad \text{för} \quad i = 1, 2, \dots, n-1 ,$$

och  $A(\bar{e}_n) = \bar{e}_n$ . Då gäller

$$R(A^k) = \text{span}\{\bar{e}_{k+1}, \dots, \bar{e}_n\} ,$$

för  $k = 1, 2, \dots, n-1$  och  $R(A^k) = \text{span}\{\bar{e}_n\}$  för  $k = n, n+1, \dots$ . Använd nu dimensionssatsen som i deluppgift b).