Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II, SF1604, den 15 mars 2010 kl 14.00-19.00.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Bonuspoäng: Bonuspoäng erhållna från lappskrivningar till kursen för D under vt10 adderas till skrivningspoängen. Generellt gäller att bonuspoäng får användas vid ordinarie tentamen och vid första ordinarie omtentamenstillfälle för respektive sektion, vilket för sektion F liksom för sektion D är den 5 juni i år.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

1. Låt $\mathbf{A}$ beteckna matrisen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Lös följande matrisekvationer

$$a)\ (1p)\ \ \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} , \quad b)\ (2p)\ \ \mathbf{X}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} , \quad c)\ (2p)\ \ (\mathbf{A}^{-1})^2\, \mathbf{X}\, \mathbf{A}^T = \mathbf{I} ,$$

där $\mathbf{I}$ betecknar identitetsmatrisen och $\mathbf{A}^T$ betecknar den till $\mathbf{A}$ transponerde matrisen.

2. Låt nu $\mathbf{B}$ beteckna matrisen

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} .$$

   (a) (1p) Bestäm samtliga egenvärden till $\mathbf{B}$.

   (b) (2p) Bestäm samtliga egenvektorer till $\mathbf{B}$.

   (c) (2p) Bestäm två olika matriser $\mathbf{Q}_1$ och $\mathbf{Q}_2$ samt en diagonalmatris $\mathbf{D}$, sådana att

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}_1\, \mathbf{D}\, \mathbf{Q}_1^T = \mathbf{Q}_2\, \mathbf{D}\, \mathbf{Q}_2^T .$$

   (Man får en poäng om man bara hittar en matris $\mathbf{Q}_1$ som uppfyller ovanstående likhet.)

3. Vid nedanstående tre deluppgifter gäller att koordinaterna är givna relativt ett ON-system i R^3.
   (a) (2p) Bestäm ekvationen för det plan π som innehåller punkterna $(1, 1, 1)$, $(1, -1, 0)$ och $(3, 3, 1)$.
   (b) (1p) Avgör om punkten $(5, 2, 3)$ tillhör det plan π som beskrevs i uppgiften ovan.
   (c) (2p) Ange på parameterform en valfri linje genom punkten $(2, 2, 2)$ och som är parallell med det ovan angivna planet π.

DEL II

4. Låt L beteckna det delrum till R^4, ON-system, som spänns upp av, genereras av, vektorerna $(1, 1, 1, 1)$ och $(1, 2, -3, 1)$.
   (a) (2p) Bestäm en bas för ortogonala komplementet $L^\perp$ till L.
   (b) (2p) Bestäm en ortogonalbas för $L^\perp$.
   (c) (1p) Bestäm en ON-bas för $L^\perp$.
5. (5p) Utred för vilka värden på det reella talet a som det linjära spannet av vektorerna $(1, 2, 1, 2)$, $(2, a, 2, a)$, $(1, a, a, a)$ och $(0, 0, 0, a)$ har dimension 0, 1, 2, 3 respektive 4.
6. (5p) Visa att för varje linjär avbildning A från R^n till R^n gäller att

$$\dim(\ker(A)) \leq \dim(\ker(A^2)) ,$$

   där $\ker(A)$ betecknar kärnan ("the kernel") till A och A^2 betecknar sammansättning av A med sig själv, dvs $A^2(\bar{x}) = A(A(\bar{x}))$ eller med ett alternativt beteckningssätt $A \circ A$.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

7. Vi betraktar ett rätvinkligt koordinatsystem i den 4-dimensionella rymden och i vilken vi har samma längdskala på de fyra koordinataxlarna.
   (a) (1p) Visa att origo tillsammans med de tre punkterna $(1, 1, 1, 1)$, $(2, 3, 0, -1)$ och $(3, 4, 1, 0)$ bildar de fyra hörnen i en parallellogram.
   (b) (2p) Motivera hur arean av en plan yta skulle kunna definieras och beräkna arean av parallellogrammet ovan.
   (c) (2p) Betrakta nu den parallellepiped i den 4-dimensionella rymden vars ena sidoyta består av parallellogrammet ovan, samt i vilken det går en kant från origo till punkten $(3, 2, 1, 1)$. Bestäm volymen av denna parallellepiped.
8. (a) (2p) Bestäm en matris $\mathbf{A}$ vars determinant är lika med noll och som är sådan att

$$\mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \mathbf{A}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} . \tag{1}$$

   (b) (2p) Finns det för varje reellt tal r en matris $\mathbf{A}$ vars determinant är lika med r och som uppfyller de bägge likheterna i ekvation (1) ?
   (c) (1p) Vi antar nu att koordinaterna är givna i ett ON-system. Finns det någon ortogonalmatris $\mathbf{A}$ som uppfyller de två likheterna i ekvation (1) ?