Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II, SF1604 för D, den 5 juni 2010 kl 09.00-14.00.

Examinator: Olof Heden.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Bonuspoäng: Bonuspoäng erhållna från lappskrivningar till kursen för D under vt10 adderas till skrivningspoängen.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

1. I vår vanliga 3-dimensionella rymd (ON-system):
   (a) (1p) Bestäm längden av vektorn $(7, 4, 3)$.
   (b) (1p) Bestäm vinkeln mellan vektorerna $(1, -1, 1)$ och $(2, 3, 1)$.
   (c) (1p) Bestäm $(1, 2, 3) \times (2, 1, 0)$.
   (d) (1p) Bestäm ekvationen för ett plan π som förutom origo innehåller punkterna $(1, 2, 3)$ och $(2, 1, 0)$.
   (e) (1p) Bestäm parameterformen för en linje genom punkten $(3, 2, 1)$ och som är parallell med planet π i föregående deluppgift.

2. (a) (2p) Visa att vektorerna $\bar{e}_1 = (3, 1, 1)$, $\bar{e}_2 = (2, 0, 1)$ och $\bar{e}_3 = (2, 1, 2)$ utgör en bas för $\mathbb{R}^3$ och att $\bar{f}_1 = (1, 1, 1)$, $\bar{f}_2 = (2, 1, 3)$ och $\bar{f}_3 = (2, 1, 2)$ utgör en annan bas för $\mathbb{R}^3$.
   (b) (2p) Det finns ju en matris $\mathbf{T}$ sådan att om en godtycklig vektor $\bar{v}$ har koordinaterna (x_1, x_2, x_3) i basen $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ och koordinaterna (y_1, y_2, y_3) i basen $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, $\bar{f}_3$ så gäller
   $$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{T} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$
   Bestäm matrisen $\mathbf{T}$.
   (c) (1p) Antag att $\bar{v}$ har koordinaterna $(1, -1, 2)$ i basen $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$. Bestäm $\bar{v}$:s koordinater (y_1, y_2, y_3) i basen $\bar{f}_1$, $\bar{f}_2$, $\bar{f}_3$.

3. (5p) Visa med hjälp av ett induktionsbevis att $2^{6n} - 1$ är jämnt delbart med 7 för alla naturliga tal $n = 1, 2, 3, \ldots$.

DEL II

4. Låt $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ vara nedanstående matriser

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

   (a) (2p) Visa att det inte finns någon matris $\mathbf{X}$ sådan att

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \, .$$

   (b) (2p) Om du byter ut elementet i en av matrisen $\mathbf{B}$:s 6 positioner mot ett annat visst tal b, så går ekvationen ovan att lösa. I vilken position (i, j) skall elementet ersättas mot vilket tal b

   (c) (1p) Du kan ta vilken som helst av de nio positionerna i matrisen $\mathbf{A}$ och ersätta elementet i den positionen med ett annat tal och då kommer systemet $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ att vara lösbart. Motivera varför.

5. (5p) Bestäm matrisen, relativt standardbasen, för en linjär avbildning i vår vanliga 3-dimensionella rymd som avbildar planet med ekvationen $x + y - z = 0$ på planet med ekvationen $3x + y + z = 0$ samt linjen med parameterformen $(x, y, z) = t(1, 1, 1)$ på linjen med prameterformen $(x, y, z) = t(1, 2, -1)$.

6. (5p) Avgör om den kvadratiska formen

$$2x^2 - 2xy + y^2 - 2yz + 2z^2$$

   är positivt definit.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

7. (5p) Med hjälp av kunskaper från gymnasiets kurser Matematik A, B, C och D samt de verktyg du har fått med dig från kursen i Linjär algebra, skall du bestämma de reella tal a och b som gör värdet av integralen nedan så litet som möjligt:

$$\int_0^1 (t^3 - a - bt)^2 \mathrm{dt} \, .$$

8. Matriserna i denna uppgift är samtliga kvadratiska $n \times n$-matriser.

   (a) (2p) Visa att om matrisen $\mathbf{B}$ har full rang, dvs rangen för matrisen $\mathbf{B}$ är n, så gäller för varje annan matris $\mathbf{A}$ att matriserna $\mathbf{AB}$ och $\mathbf{BA}$ har samma rang.

   (b) (1p) Bestäm två 3×3-matriser $\mathbf{A}$ och $\mathbf{B}$ sådana att matriserna $\mathbf{AB}$ och $\mathbf{BA}$ har olika rang.

   (c) (2p) Givet en godtycklig matris $\mathbf{B}$. Karaktärisera de matriser $\mathbf{A}$ som är sådana att rangen för matrisen $\mathbf{AB}$ är lika med rangen för matrisen $\mathbf{BA}$.