Matematiska Institutionen
KTH

Tentamensskrivning på kursen Linjär algebra II, SF1604, den 17 april 2010 kl 09.00-14.00.

Examinator: Olof Heden.

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel är tillåtna på tentamensskrivningen.

Betygsgränser: (Totalsumma poäng är 40p.)

13	poäng totalt eller mer ger minst omdömet	Fx
15	poäng totalt eller mer ger minst betyget	E
20	poäng totalt eller mer ger minst betyget	D
25	poäng totalt eller mer ger minst betyget	C
30	poäng totalt eller mer ger minst betyget	B
35	poäng totalt eller mer ger minst betyget	A

Bonuspoäng: Bonuspoäng erhållna från lappskrivningar till kursen för D under vt10 adderas till skrivningspoängen, även vid detta extra tentamenstillfälle. Generellt gäller att bonuspoäng får användas vid ordinarie tentamen och vid första ordinarie omtentamenstillfälle för respektive sektion, vilket för sektion F liksom för sektion D är den 5 juni i år.

För full poäng krävs korrekta och väl presenterade resonemang.

DEL I

1. En triangel i den tredimensionella rymden har sina hörn i punkterna $(1, 1, 1)$, $(2, 4, 3)$ och $(3, 4, 1)$ (ON-system).
   (a) (2p) Bestäm längden av triangels samtliga sidor.
   (b) (2p) Bestäm arean av triangeln.
   (c) (1p) Avgör om triangeln är en rätvinklig triangel, dvs om någon av vinklarna i triangeln är $90°$.

2. Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - ax_3 = 0 \end{cases}$$

   (a) (2p) Bestäm ett värde på talet a för vilket ekvationssystemet ovan har oändligt många lösningar.
   (b) (1p) Ange samtliga lösningar till systemet för det värde på talet a som du fann i deluppgiften ovan.
   (c) (2p) Finns det något värde på det reella talet b för vilket systemet nedan har oändligt många lösningar

$$\begin{cases} bx_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + bx_2 = 0 \end{cases}$$

3. För den linjära avbildningen A från R^3 till R^3 gäller att $A(1, 1, 1) = (1, 2, -1)$, $A(0, 2, 1) = (2, 1, 2)$ och $A(1, 2, 2) = (0, 3, -4)$.
   (a) (2p) Bestäm avbildningens matris relativt standardbasen.
   (b) (1p) Bestäm $A(2, 1, 1)$.
   (c) (1p) Bestäm avbildningens kärna.
   (d) (1p) Finns det någon vektor $\bar{y}$ i R^3 sådan att $A(\bar{x}) \neq \bar{y}$ för alla $\bar{x}$ i R^3.

DEL II

4. Låt L beteckna det delrum till R^4 som spänns upp av (genereras av) vektorerna $(0,1,1,1)$, $(1,0,2,1)$ och $(0,0,1,1)$ (ON-system)
   (a) (3p) Bestäm projektionen av vektorn $(1,1,1,1)$ på L.
   (b) (2p).Bestäm projektionen av $(1,1,1,1)$ på ortogonala komplementet till L.

5. (a) (3p) Undersök om den kvadratiska formen
$$Q(x_1,x_2,x_3) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$
   är positivt definit.
   (b) (2p) Visa att den kvadratiska formen
$$Q(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2x_3 \ ,$$
   är en indefinit kvadratisk form.

6. (5p) Visa med hjälp av ett induktionsbevis att talen i talföljden $a_n = 2\cdot 3^n + n^2$, där $n = 0,1,2,\ldots$, satisfierar rekursionsekvationen
$$a_{n+1} = 3a_n - 2n^2 + 2n + 1 \ , \qquad n = 1,2,3,\ldots \ ,$$
   med $a_0 = 2$.

DEL III

Om du i denna del använder eller hänvisar till satser från läroboken skall dessa citeras, ej nödvändigvis ordagrant, där de används i lösningen.

7. (a) (1p) Antag att 3×3-matrisen $\mathbf{Q}$ är en ortogonalmatris. Ange längden av vektorn $\mathbf{Q}(0\ 3\ 4)^T$, (ON-system).
   (b) (1p) En ortogonalmatris kan ha högst två olika egenvärden. Ange dessa. Motivera!
   (c) (3p) Ange, med motivering, samtliga symmetriska ortogonalmatriser som har egenvektorerna $(1,1,1)$, $(2,-1,-1)$ och $(1,-1,0)$. (Poäng ges efter svarets kvalitet. Om du bara ger ett exempel på en sådan matris som uppfyller alla givna krav får du t ex 1p.)

8. (a) (1p) Låt $\mathbf{A}$ beteckna en $n\times n$-matris vars kolonner är linjärt oberoende. Visa att för varje positivt heltal m så gäller att kolonnerna i matrisen $\mathbf{A}^m$ är linjärt oberoende.
   (b) (2p) Låt $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ och $\bar{e}_4$ beteckna en bas för det 4-dimensionella vektorrummet V, och låt A beteckna den linjära avbildning för vilken
$$A(\bar{e}_1) = \bar{e}_2 \ , \ A(\bar{e}_2) = \bar{e}_3 \ , \ A(\bar{e}_3) = \bar{e}_4 \ , \ A(\bar{e}_4) = \bar{0} \ .$$
   Låt A^k beteckna $A\circ A\circ A\circ\cdots\circ A$, ($k$ stycken $A:n$). Visa att
$$\dim(\ker(A)) = 1\,,\ \dim(\ker(A^2)) = 2\,,\ \dim(\ker(A^3)) = 3\,,\ \dim(\ker(A^4)) = 4\,.$$
   (c) (2p) Är det sant för de linjära avblidningar A av ett n-dimensionellt vektorrum V på sig själv som är sådana att om
$$\dim(\ker(A)) = 1,\ \ \dim(\ker(A^2)) = 2,\ \ \dim(\ker(A^3)) = 3,\ldots,\ \dim(\ker(A^{n-1})) = n-1,$$
   så gäller alltid att
$$\dim(\ker(A^n)) = n\ .$$