Henrik Shahgholian
Institutionen För Matematik
KTH

Kontrollkrivning Del 2, 27/11/2008, Tid: 10.15-12.00

Varje uppgift har maximalt 3 poäng. För en godkänd krävs totalt 5 poäng av 9.
Alla svar ska motiveras ordentlig med räkningar. HJÄLPMEDEL: Enbart Beta.

---

1) Bestäm Fourierserien för $f(x) = |\cos x|$ över $(-\pi, \pi)$.

2) Bestäm en 2-periodisk lösning till differential-differensekvationen

$$y'(t) + y(t+1) = \cos(2\pi t).$$

3) Låt f vara en deriverbar funktion på intervallet $(0,3)$ med undantag i punkten $x = 1$, där den är diskontinuerlig, med $f(1^+) = 1$ och $f(1^-) = 3$ och att $f'(1^\pm)$ existerar (dvs höger- och vänsterderivator existerar).
(a) Hur ska f utvidgas för att den ska ha en Fourier-cosinusserie i intervallet $(0,3)$?
(b) Skriv formeln för Fourier-cosinsus koefficienterna a_n för alla n.
(c) Om $F(x)$ betecknar den utvidgade funktionens Fouriser-cosinusserie, vad är värdet $F(1)$?

Lycka Till

Institutionen För Matematik
KTH

Lösningsförslag till Kontrollskrivning Del 2, 27/11/2008

1) Funktionen är en jämn funktion, och därmed är $b_n = 0$. För a_n gäller det att

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} |\cos t| \cos nt \, dt = \text{ jämn funktion } = 2\int_{0}^{\pi} |\cos t| \cos nt \, dt =$$

$$2\int_{0}^{\pi/2} \cos t \cos nt \ dt - 2\int_{\pi/2}^{\pi} \cos t \cos nt \ dt =$$

$$2\left(\frac{-\sin(1+n)\pi/2}{1+n} + \frac{\sin(1-n)\pi/2}{1-n}\right).$$

Använder vi att $\sin(1 \pm n)\pi/2 = \cos n\pi/2$ så får vi

$$\pi a_n = \frac{-4n\cos n\pi/2}{1-n^2}.$$

Vidare är $\cos n\pi/2 = 0$ då $n = 2k+1$ (udda) och $\cos n\pi/2 = (-1)^k$ då $n = 2k$ (jämt) $(k = 0, 1, 2, \cdots)$. Vi får således att

$$\pi a_n = \frac{-8k(-1)^k}{1-(2k)^2}, \qquad n = 2k.$$

serien blir då

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{-8k(-1)^k}{\pi(1-4k^2)} \cos(2kt).$$

2) Låt

$$y(t) = \sum_{0}^{\infty} c_n e^{i\pi nt}$$

och sätt in i ekvationen

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \left(i\pi n + e^{i\pi n}\right) c_n e^{i\pi nt} = \frac{e^{2i\pi t} + e^{-2i\pi t}}{2}.$$

Efter koefficientidentifiering får vi

$$(2i\pi + e^{2i\pi})c_2 = 1/2 \qquad c_2 = \frac{1-2\pi i}{2(1+4\pi^2)}$$

$$(-2i\pi + e^{-2i\pi})c_{-2} = 1/2 \qquad c_{-2} = \frac{1+2\pi i}{2(1+4\pi^2)}.$$

Därmed är

$$y(t) = 2\text{Realdelen } \left(c_2 e^{2i\pi t}\right) = \frac{\cos(2\pi t) + 2\pi \sin(2\pi t))}{1+4\pi^2}$$

3) (a) Funktionen ska utvidgas som en jämn funktion, $f(-x) = f(x)$.
(b) Fourier cosinuskoeffienten ges av

$$a_n = \frac{1}{3}\int_{-3}^{3} f(x)\cos(\pi n/3)$$

(c) $F(0) = \frac{f(1^+)+f(1^-)}{2} = 2.$