Lektion 12, Flervariabelanalys den 10 februari 2000

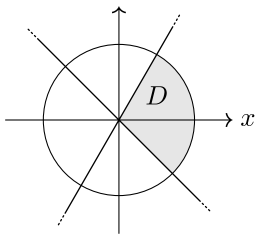
14.6.20 Bestäm volymen av området ovanför x, y-planet, under paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ och i kilen $-x \le y \le \sqrt{3}\,x$.

Paraboloiden är ovanför x, y-planet när

$$z = 1 - x^2 - y^2 \ge 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + y^2 \le 1,$$

d.v.s. innanför enhetscirkeln.

De punkter som tillhör området har alltså x- och y-koordinat i snittet mellan enhetsdisken och kilen $-x \le y \le \sqrt{3}\,x$.



I z-led begränsas området av funktionsytorna $z = 0$ och $z = 1 - x^2 - y^2$. Volymen ges av

$$V = \iint_D (1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy.$$

I polära koordinater beskrivs området D i x, y-planet som

$$-\tfrac{1}{4}\pi \le \theta \le \arctan\sqrt{3} = \tfrac{1}{3}\pi, \quad 0 \le r \le 1,$$

och volymintegralen blir

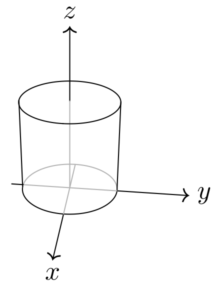
$$\begin{aligned} V &= \int_{-\pi/4}^{\pi/3} d\theta \int_0^1 (1 - r^2)\,r\,dr = \int_{-\pi/4}^{\pi/3} d\theta \left[\tfrac{1}{2}r^2 - \tfrac{1}{4}r^4\right]_0^1 \\ &= \tfrac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/3} d\theta = \tfrac{7}{48}\pi. \end{aligned}$$

14.6.24 Beräkna

$$\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$$

där R är cylindern $0 \le x^2 + y^2 \le a^2$, $0 \le z \le h$.

Enligt den första olikheten $0 \le x^2 + y^2 \le a^2$ är cylindern parallell med z-axeln och med x- och y-koordinater innanför cirkeln med mittpunkt i origo och radie a. Den andra olikheten $0 \le z \le h$ begränsar cylindern i höjdled.



Eftersom området är rotationssymmetriskt kring z-axeln beskrivs det enklast med cylindriska koordinater

$$0 \le z \le h, \quad 0 \le \theta < 2\pi, \quad 0 \le r \le a.$$

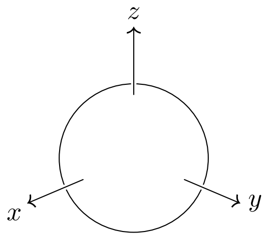
Integralen blir

$$\begin{aligned} &\iiint_R (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz = \{\text{ cylindriska koordinater }\} \\ &\quad = \iiint_R (r^2 + z^2)\,r\,dr\,d\theta\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \int_0^a (r^2 + z^2) r\,dr \\ &\quad = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \left[\tfrac{1}{4}r^4 + \tfrac{1}{2}z^2 r^2\right]_0^a = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h \left(\tfrac{1}{4}a^4 + \tfrac{1}{2}a^2 z^2\right) dz \\ &\quad = \int_0^{2\pi} d\theta \left[\tfrac{1}{4}a^4 z + \tfrac{1}{6}a^2 z^3\right]_0^h = \int_0^{2\pi} \left(\tfrac{1}{4}a^4 h + \tfrac{1}{6}a^2 h^3\right) d\theta \\ &\quad = \tfrac{1}{6}\pi a^2 h(3a^2 + 2h^2). \end{aligned}$$

14.6.26 Bestäm

$$\iiint_B (x^2+y^2+z^2)\,dV$$

där B är klotet $x^2+y^2+z^2 \le a^2$.



Eftersom klotet $x^2+y^2+z^2 \le a^2$ är helt rotationssymmetriskt inför vi sfäriska koordinater. I dessa koordinater beskrivs klotet som

$$0 \le \theta < 2\pi, \quad 0 \le \varphi \le \pi, \quad 0 \le r \le a.$$

Integralen blir

$$\iiint_B (x^2+y^2+z^2)\,dV = \left\{ \begin{array}{l|l} x = r\sin\varphi\cos\theta & \\ y = r\sin\varphi\sin\theta & dV = r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta \\ z = r\cos\varphi & \end{array} \right\}$$

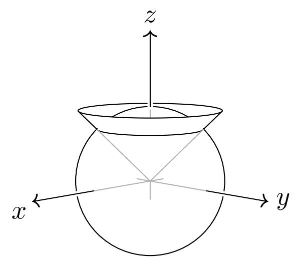
$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi \int_0^a r^4\,dr = 2\pi\cdot 2\cdot \tfrac{1}{5}a^5 = \tfrac{4}{5}\pi a^5.$$

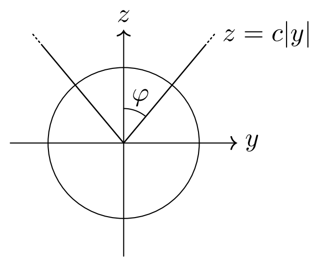
14.6.28 Beräkna

$$\iiint_R (x^2+y^2)\,dV$$

där R är området ovanför konen $z = c\sqrt{x^2+y^2}$ och innanför sfären $x^2+y^2+z^2 = a^2$.

Funktionsytan $z = c\sqrt{x^2+y^2}$ är en kon med spets i origo och z-axeln som symmetriaxel. Området R har alltså följande utseende.





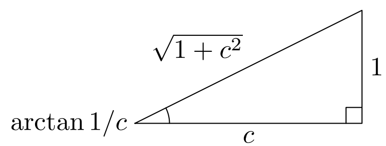
Vi beskriver området enklast med sfäriska koordinater

$$0 \le \varphi \le \arctan\frac{1}{c}, \quad 0 \le \theta \le 2\pi, \quad 0 \le r \le a.$$

Integralen blir

$$\begin{aligned}
\iiint_V (x^2+y^2)\,dV &= \{\,\text{sfäriska koordinater}\,\} \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\arctan 1/c} \sin^3\varphi\,d\varphi \int_0^a r^4\,dr \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\arctan 1/c} (1-\cos^2\varphi)\sin\varphi\;d\varphi \int_0^a r^4\,dr \\
&= \Big[\,\theta\,\Big]_0^{2\pi} \cdot \Big[-\cos\varphi + \tfrac{1}{3}\cos^3\varphi\Big]_0^{\arctan 1/c} \cdot \Big[\,\tfrac{1}{5}r^5\,\Big]_0^a \\
&= 2\pi\Big(-\cos\arctan 1/c + \tfrac{1}{3}\cos^3\arctan 1/c - \big(-1+\tfrac{1}{3}\big)\Big)\cdot \tfrac{1}{5}a^5
\end{aligned}$$

För att förenkla $\cos\arctan 1/c$ ritar vi en hjälptriangel.



$$\cos\arctan 1/c = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}$$

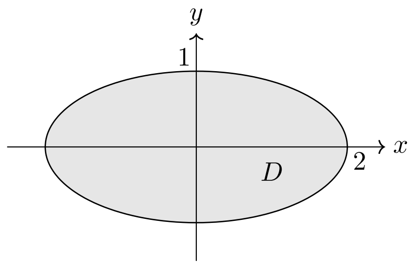
$$= \frac{2\pi a^5}{5}\Big(-\frac{c}{\sqrt{1+c^2}} + \frac{\frac{1}{3}c^3}{(1+c^2)^{3/2}} + 2/3\Big).$$

14.7.2 Bestäm arean av ytan till planet $5z = 3x - 4y$ innanför den elliptiska cylindern $x^2 + 4y^2 = 4$.

Vi ska alltså bestämma arean av funktionsytan $z = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y$ i området

$$x^2 + 4y^2 \le 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 \le 1.$$

Området består alltså av en ellips med mittpunkt i origo och halvaxlar 2 och 1.



För att beskriva området inför vi omskalade polära koordinater

$$\begin{aligned} x &= 2r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta, \end{aligned}$$

och området ges då av

$$0 \le \theta < 2\pi, \quad 0 \le r \le 1.$$

Areaelementet $dx\,dy$ övergår till

$$\begin{aligned} dx\,dy &= \left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dr\,d\theta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr\,d\theta \\ &= \begin{vmatrix} 2\cos\theta & -2r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} dr\,d\theta = (2r\cos^2\theta + 2r\sin^2\theta)\,dr\,d\theta = 2r\,dr\,d\theta. \end{aligned}$$

Areaintegralen blir

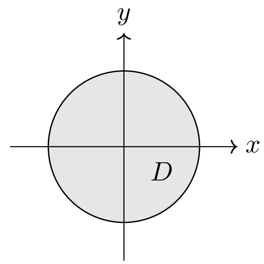
$$\begin{aligned} &\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy = \iint_D \sqrt{1 + \left(\tfrac{3}{5}\right)^2 + \left(-\tfrac{4}{5}\right)^2}\,dx\,dy \\ &\quad = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 2r\,dr = \sqrt{2}\cdot 2\pi\left[r^2\right]_0^1 = 2\sqrt{2}\,\pi. \end{aligned}$$

14.7.4 Bestäm arean av halvellipsytan $z = 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Funktionen har definitionsområdet

$$1 - x^2 - y^2 \ge 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + y^2 \le 1,$$

d.v.s. enhetsdisken.



Integranden till areaintegralen är

$$\begin{aligned} &\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \\ &\quad = \sqrt{1 + \left(\frac{2}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}\cdot(-2x)\right)^2 + \left(\frac{2}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}\cdot(-2y)\right)^2} \\ &\quad = \sqrt{1 + \frac{4x^2+4y^2}{1-x^2-y^2}} = \sqrt{\frac{1+3x^2+3y^2}{1-x^2-y^2}}. \end{aligned}$$

"Den rikliga förekomsten av uttrycket $x^2 + y^2$ antyder att införandet av polära koordinater kan förenkla räknearbetet." [Leo Ullemar, 1972]

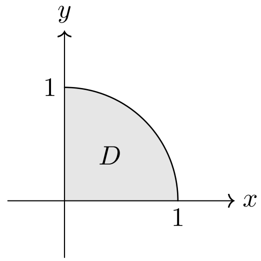
Areaintegralen blir

$$\begin{aligned} &\iint_D \sqrt{\frac{1+3x^2+3y^2}{1-x^2-y^2}}\,dx\,dy = \{\text{ polära koordinater }\} \\ &\quad = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \sqrt{\frac{1+3r^2}{1-r^2}}\,r\,dr = \left\{\, s = \sqrt{1-r^2};\ ds = \frac{-r}{\sqrt{1-r^2}}\,dr \,\right\} \\ &\quad = 2\pi\int_0^1 \sqrt{4-3s^2}\,ds = 4\pi\int_0^1 \sqrt{1 - \tfrac{3}{4}s^2}\,ds \\ &\quad = \left\{\, s = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\sin\varphi;\ ds = \tfrac{2}{\sqrt{3}}\cos\varphi\,d\varphi \,\right\} \\ &\quad = \frac{8\pi}{\sqrt{3}}\int_0^{\pi/3} |\cos\varphi|\,\cos\varphi\,d\varphi = \frac{8\pi}{\sqrt{3}}\Big[\tfrac{1}{2}\varphi + \tfrac{1}{4}\sin 2\varphi\Big]_0^{\pi/3} \\ &\quad = \frac{8\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right) = \frac{4\pi^2}{3\sqrt{3}} + \pi. \end{aligned}$$

14.7.6 Bestäm arean av paraboloiden $z = 1 - x^2 - y^2$ i första oktanten.

Första oktanten definieras som $x, y, z \geq 0$. Den del av paraboloidens yta som tillhör första oktanten bestäms alltså av alla x och y s.a.

$$\begin{aligned} & x, y \geq 0 \quad \text{och} \quad 1 - x^2 - y^2 \geq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x, y \geq 0 \quad \text{och} \quad x^2 + y^2 \leq 1. \end{aligned}$$



Arean ges av

$$\begin{aligned} &\iint_D \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2}\, dx\, dy = \iint_D \sqrt{1 + (2x)^2 + (2y)^2}\, dx\, dy \\ &= \{\text{ polära koordinater }\} = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2}\, r\, dr \\ &= \{\, s = 1 + 4r^2;\ ds = 8r\, dr \,\} = \tfrac{1}{8} \int_0^{\pi/2} d\theta \int_1^5 \sqrt{s}\, ds \\ &= \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{1}{2}\pi \cdot \Big[\tfrac{2}{3} s\sqrt{s}\Big]_1^5 = \tfrac{1}{24}\pi(5\sqrt{5} - 1). \end{aligned}$$

14.7.8 Bestäm arean av ytan $z = \sqrt{x}$ ovanför området $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq \sqrt{x}$.

Funktionen $z = \sqrt{x}$ är alltid icke-negativ och befinner sig därför alltid ovanför x, y-planet.

Arean av funktionsytan inom området ges av

$$\begin{aligned} &\iint_D \sqrt{1 + \Big(\frac{\partial z}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial z}{\partial y}\Big)^2}\, dx\, dy = \iint_D \sqrt{1 + \Big(\frac{1}{2\sqrt{x}}\Big)^2 + 0^2}\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, dy = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{1}{4x}}\, \sqrt{x}\, dx = \int_0^1 \sqrt{x + \tfrac{1}{4}}\, dx \\ &= \Big[\tfrac{2}{3}(x + \tfrac{1}{4})^{3/2}\Big]_0^1 = \tfrac{2}{3}\big(\tfrac{5}{4}\big)^{3/2} - \tfrac{2}{3}\big(\tfrac{1}{4}\big)^{3/2} = \frac{5\sqrt{5} - 1}{12}. \end{aligned}$$