Lektion 10, Flervariabelanalys den 8 februari 2000

14.2.4 Beräkna den itererade integralen

$$\int_0^2 dy \int_0^y y^2\, e^{xy}\, dx.$$

När vi beräknar den inre integralen (den med avseende på x) betraktar vi y som en konstant.

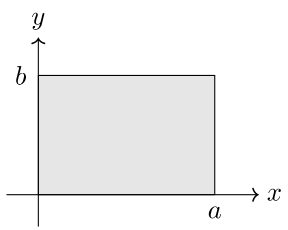
$$\int_0^2 dy \int_0^y y^2\, e^{xy}\, dx = \int_0^2 dy \left[\, ye^{xy} \,\right]_0^y = \int_0^2 dy\, y(e^{y\cdot y} - e^{0\cdot y})$$
$$= \int_0^2 y(e^{y^2} - 1)\, dy = \{\, s = y^2;\ ds = 2y\, dy \,\} = \int_0^4 \tfrac{1}{2}(e^s - 1)\, ds$$
$$= \left[\, \tfrac{1}{2}e^s - \tfrac{1}{2}s \,\right]_0^4 = \tfrac{1}{2}e^4 - \tfrac{1}{2}\cdot 4 - \left(\tfrac{1}{2}e^0 - 0\right) = \tfrac{1}{2}e^4 - \tfrac{5}{2}.$$

14.2.6 Beräkna

$$\iint_R x^2y^2\, dA,$$

där R är rektangeln $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$.

Vi ritar först upp området R.



Dubbelintegralen ska vi beräkna som en itererad integral, och då måste vi bestämma i vilken ordning variablerna ska integreras. I detta fall är området lika enkelt både i x- och y-led, och integranden är helt symmetrisk i x och y så det spelar ingen roll vilken variabel vi integrerar först. Låt oss välja att integrera i y-led först. Vi måste då beskriva området i formen

$$c \le x \le d, \quad g(x) \le y \le h(x).$$

I vårt fall är

$$0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b.$$

Dubbelintegralen är

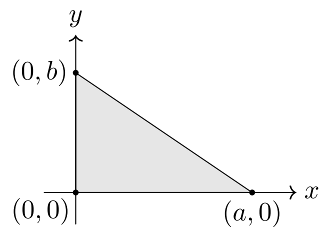
$$\iint_R x^2y^2\, dx\, dy = \int_0^a dx \int_0^b x^2y^2\, dy = \int_0^a dx \left[\, \tfrac{1}{3}y^3 \,\right]_0^b$$
$$= \tfrac{1}{3}b^3 \int_0^a x^2\, dx = \tfrac{1}{3}b^3 \left[\, \tfrac{1}{3}x^3 \,\right]_0^a = \tfrac{1}{9}a^3b^3.$$

14.2.8 Beräkna

$$\iint_T (x - 3y)\, dx\, dy,$$

där T är triangeln med hörnpunkter i $(0,0)$, $(a,0)$ och $(0,b)$.

Området T har utseendet



Om vi integrerar först i x-led måste vi för varje y mellan 0 och b kunna skriva

$$g(y) \leq x \leq h(y).$$

I detta fall är den undre gränsen noll och den övre gränsen är linjen mellan $(0, b)$ och $(a, 0)$, som har ekvationen

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Området kan alltså beskrivas som

$$0 \leq y \leq b, \quad 0 \leq x \leq a(1 - y/b).$$

Dubbelintegralen är

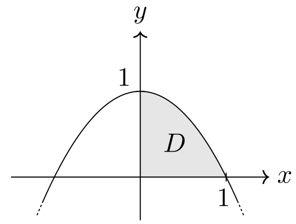
$$\begin{aligned}
\iint_T (x - 3y)\,dx\,dy &= \int_0^b dy \int_0^{a(1-y/b)} (x - 3y)\,dx \\
&= \int_0^b dy \left[\,\tfrac{1}{2} - 3xy\,\right]_0^{a(1-y/b)} \\
&= \int_0^b dy \left(\tfrac{1}{2}a^2(1 - y/b)^2 - 3ya(1 - y/b)\right) dy \\
&= \tfrac{1}{2}a^2 \int_0^b (1 - y/b)^2\,dy - 3a \int_0^b y\,dy + \frac{3a}{b} \int_0^b y^2\,dy \\
&= \tfrac{1}{2}a^2 \left[\,-\tfrac{1}{3}b(1 - y/b)^3\,\right]_0^b - 3a \left[\,\tfrac{1}{2}y^2\,\right]_0^b + \frac{3a}{b} \left[\,\tfrac{1}{3}y^3\,\right]_0^b \\
&= \tfrac{1}{6}a^2 b - \tfrac{3}{2}ab^2 + ab^2 = \tfrac{1}{6}a^2 b - \tfrac{1}{2}ab^2.
\end{aligned}$$

14.2.10 Beräkna

$$\iint_D x \cos y\,dA,$$

där D är det ändliga område i första kvadranten begränsad av koordinataxlarna och kurvan $y = 1 - x^2$.

Vi ritar upp området.



Eftersom D begränsas av kurvan $y = 1 - x^2$ beskrivs området av

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x^2.$$

Vårt förstahandsval är därför att integrera i y-led och sedan i x-led.

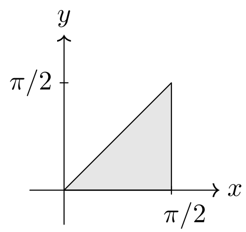
$$\begin{aligned}
\iint_D x \cos y\,dx\,dy &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x^2} x \cos y\,dy = \int_0^1 x \left[\,\sin y\,\right]_0^{1-x^2} dx \\
&= \int_0^1 x \sin(1 - x^2)\,dx = \{\, s = 1 - x^2;\ ds = -2x\,dx \,\} = \int_1^0 -\tfrac{1}{2} \sin s\,ds \\
&= \left[\,\tfrac{1}{2} \cos s\,\right]_1^0 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} \cos 1.
\end{aligned}$$

14.2.16 Skissera integrationsområdet och beräkna den itererade integralen

$$\int_0^{\pi/2} dy \int_y^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Integrationsområdet ges enligt den itererade integralen av

$$0 \le y \le \pi/2, \quad y \le x \le \pi/2.$$



Även om integralen är skriven som att vi först ska integrera i x-led och sedan i y-led, kan vi kasta om integrationsordningen om det beräkningstekniskt gynnar oss. Detta givetvis under förutsättning att integranden är kontinuerlig i hela triangeln.

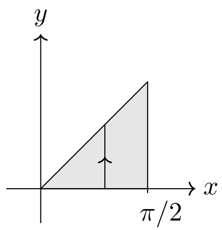
I vårt fall är integranden $\frac{\sin x}{x}$ som verkar svår att integrera i x-led, så vi väljer att kasta om integrationsordningen. Vi måste då skriva om området i formen

$$0 \le x \le \pi/2, \quad g(x) \le y \le h(x),$$

och dessutom kontrollera att integranden är kontinuerlig.

- Omskrivningen av området ger att

$$0 \le x \le \pi/2, \quad 0 \le y \le x.$$



- Den enda punkt där vi inte på förhand kan säga om integranden är kontinuerlig är $(0,0)$. Men i den punkten har vi att

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

  så om vi definierar integrandens värde till 1 i origo har vi en kontinuerlig funktion.

Integralen får vi nu till

$$\int_0^{\pi/2} dx \int_0^x \frac{\sin x}{x}\, dy = \int_0^{\pi/2} dx\, \frac{\sin x}{x} \Big[\, y\, \Big]_0^x$$

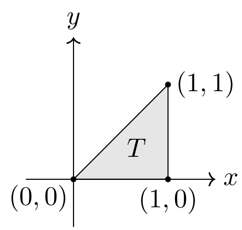
$$= \int_0^{\pi/2} \sin x\, dx = \Big[-\cos x \Big]_0^{\pi/2} = 1.$$

14.2.14 Beräkna

$$\iint_T \frac{xy}{1+x^4}\, dA,$$

där T är triangeln med hörnpunkter $(0,0)$, $(1,0)$ och $(1,1)$.

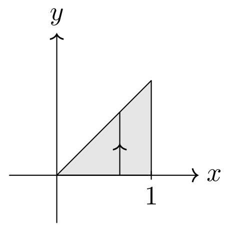
Om vi bara betraktar området T så är det lika enkelt att integrera i x-led som i y-led.



Däremot är integranden jobbigare att integrera i x-led än i y-led.

Strategin som vi ska använda är att först integrera i y-led och sedan hoppas på att resultatet är enklare att integrera i x-led är den nuvarande integranden.

För ett givet x-värde begränsas triangeln i y-led underifrån av $y = 0$ och ovanifrån av $y = x$.



Dubbelintegralen är därför

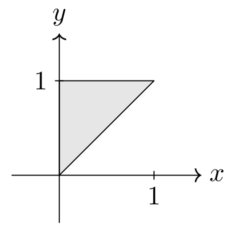
$$\begin{aligned}\iint_T \frac{xy}{1+x^4}\,dx\,dy &= \int_0^1 dx \int_0^x \frac{xy}{1+x^4}\,dy = \int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\Bigl[\,\tfrac{1}{2}y^2\,\Bigr]_0^x dx\\ &= \int_0^1 \frac{x}{1+x^4}\cdot\tfrac{1}{2}x^2\,dx = \{\, s = 1+x^4;\ ds = 4x^3\,dx \,\}\\ &= \tfrac{1}{8}\int_1^2 \frac{ds}{s} = \Bigl[\,\tfrac{1}{8}\log|s|\,\Bigr]_1^2 = \frac{\log 2}{8}.\end{aligned}$$

14.2.20 Bestäm volymen under funktionsytan $z = 1 - x^2$ och ovanför området $0 \le y \le 1$, $0 \le x \le y$.

Om vi kallar området i x, y-planet för D så ges volymen under funktionsytan till en positiv funktion $z = f(x, y)$ av

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy. \qquad (*)$$

Om vi ritar upp området D



så ser vi att D helt ligger i det område där $1-x^2$ är positiv, så vi kan använda $(*)$ utan att behöva beskära D.

I uppgiftstexten är D given i formen

$$0 \le y \le 1, \quad 0 \le x \le y,$$

vilket gör det lämpligt att först integrera i x-led.

$$\begin{aligned}V = \iint_D (1-x^2)\,dx\,dy &= \int_0^1 dy \int_0^y (1-x^2)\,dx = \int_0^1 dy\,\Bigl[x - \tfrac{1}{3}x^3\Bigr]_0^y\\ &= \int_0^1 \bigl(y - \tfrac{1}{3}y^3\bigr)\,dy = \Bigl[\,\tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{12}y^4\Bigr]_0^1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{12} = \tfrac{5}{12}.\end{aligned}$$

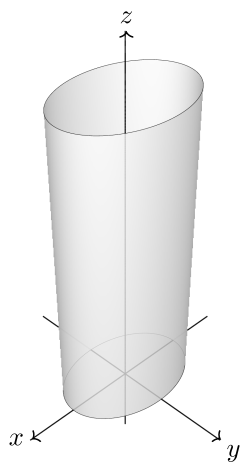
14.2.28 Bestäm volymen innanför cylindern $x^2 + 2y^2 = 8$, ovanför planet $z = y - 4$ och under planet $z = 8 - x$.

Vi ska först försöka föreställa oss den kropp som vi ska bestämma volymen av.

Cylindern skriver vi först i standardform

$$\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1,$$

och vi ser att den elliptiska cylindern har halvaxlar $\sqrt{8}$ och 2, och z-axeln som generatris.



De två planen skär cylindern och avgränsar en ändlig del av cylindern. Avståndet i höjdled mellan planen ges av differensen mellan deras z-koordinater,

$$8 - x - (y - 4) = 12 - x - y.$$

Innanför cylindern är detta avstånd positivt vilket vi ser med skattningen

$$12 - x - y \geq 12 - \sqrt{8} - 2 \geq 12 - 8 - 2 = 2 > 0.$$

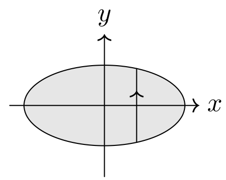
Alltså är det övre planet hela tiden ovanför det undre planet innanför cylindern.

Volymen av kroppen är volymen under det övre planet minus volymen under det undre planet.

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (8 - x)\,dx\,dy - \iint_D (y - 4)\,dx\,dy \\ &= \iint_D (12 - x - y)\,dx\,dy, \end{aligned}$$

där D är ellipsen $x^2 + 2y^2 = 8$. Ellipsen kan vi också skriva i formen

$$-\sqrt{8} \leq x \leq \sqrt{8}, \quad -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{8 - x^2} \leq y \leq \tfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{8 - x^2}.$$



Volymintegralen är

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (12 - x - y)\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} dx \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}} (12 - x - y)\,dy \\ &= \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} dx \left[(12 - x)y - \tfrac{1}{2}y^2 \right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{8-x^2}} \\ &= \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \sqrt{2}\,(12 - x)\sqrt{8 - x^2}\,dx = 12\sqrt{2} \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \sqrt{8 - x^2}\,dx + \sqrt{2} \int_{-\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} -x\sqrt{8 - x^2}\,dx. \end{aligned}$$

Den första integralen är areaintegralen av en halvcirkel med radie $\sqrt{8}$ och har därför värdet $12\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\pi(\sqrt{8}\,)^2 = 48\sqrt{2}\,\pi$. I den andra integralen ser vi att integranden är udda, och eftersom integrationsområdet är origosymmetriskt är integralen noll.

Vi har alltså att

$$V = 48\sqrt{2}\,\pi.$$

14.3.2 Bestäm om integralen

$$\iint_Q \frac{dx\,dy}{(1 + x^2)(1 + y^2)}$$

konvergerar, där Q är första kvadranten i x,y-planet.

Integranden är en positiv funktion och integralen konvergerar omm en av dess itererade varianter konvergerar.

Första kvadranten kan skrivas

$$0 \leq x < \infty, \quad 0 \leq y < \infty.$$

En av de itererade integralerna får vi till

$$\int_0^\infty dy \int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+y^2)} = \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2}$$
$$= \left(\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\right)^2 = \left(\Big[\arctan x\Big]_0^\infty\right)^2$$
$$= \tfrac{1}{4}\pi^2 < \infty.$$

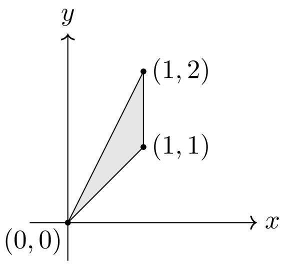
Alltså är integralen i uppgiftstexten konvergent med värdet $\pi^2/4$.

14.3.4 Bestäm om integralen

$$\iint_T \frac{1}{x\sqrt{y}}\,dA$$

över triangeln T med hörnpunkter $(0,0)$, $(1,1)$ och $(1,2)$ är konvergent.

Vi ritar upp triangeln T.



Eftersom triangeln bara innehåller punkter med positiva x-koordinater är integranden positiv och integralen konvergent omm en av dess itererade integraler konvergerar.

I y-led är området begränsat av de två räta linjerna $y=x$ och $y=2x$, varför triangeln kan beskrivas som

$$0 \le x \le 1, \quad x \le y \le 2x.$$

Integration först i y-led ger

$$\int_0^1 dx \int_x^{2x} \frac{dy}{x\sqrt{y}} = \int_0^1 dx\, \frac{1}{x}\Big[2\sqrt{y}\Big]_x^{2x}$$
$$= \int_0^1 \frac{1}{x}(2\sqrt{2}-2)\sqrt{x}\,dx = (2\sqrt{2}-2)\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$
$$= (2\sqrt{2}-2)\Big[2\sqrt{x}\Big]_0^1 = 4(\sqrt{2}-1) < \infty.$$

Alltså är integralen i uppgiftstexten konvergent.