Lektion 6, Flervariabelanalys den 27 januari 2000

12.7.2 Givet funktionen

$$f(x,y)=\frac{x-y}{x+y}$$

och punkten $p=(1,1)$, beräkna

a) gradienten till f i p,

b) en ekvation för tangentplanet till f:s graf i punkten $\big(p,f(p)\big)$,

c) en ekvation för tangentlinjen till nivåkurvan för f i punkten p.

a) Gradienten till f är

$$\nabla f=\Big(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\Big),$$

där

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1\cdot(x+y)-(x-y)\cdot 1}{(x+y)^2}=\frac{2y}{(x+y)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{-1\cdot(x+y)-(x-y)\cdot 1}{(x+y)^2}=\frac{-2x}{(x+y)^2}$$

I punkten $p=(1,1)$ är alltså

$$\nabla f(p)=\Big(\frac{2y}{(x+y)^2},\frac{-2x}{(x+y)^2}\Big)\Big|_{x=y=1}=\big(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\big).$$

b) Grafen till f är den yta i $\boldsymbol{R}^3$ bestående av alla punkter (x,y,z) som uppfyller sambandet

$$z=f(x,y).$$

Vi kan skriva om detta samband till

$$0=f(x,y)-z.$$

Grafen är alltså i själva verket 0-nivåytan till funktionen

$$g(x,y,z)=f(x,y)-z.$$

En normalvektor till g:s nivåyta i punkten $\big(1,1,f(1,1)\big)$ är gradienten

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}=\nabla g(1,1,0)&=\Big(\frac{\partial g}{\partial x},\frac{\partial g}{\partial y},\frac{\partial g}{\partial z}\Big)\Big|_{\substack{x=y=1\\z=0}}\\&=\Big(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y},-1\Big)\Big|_{\substack{x=y=1\\z=0}}=\big(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-1\big).\end{aligned}$$

Eftersom tangentplanet genom punkten $(1,1,0)$ ska tangera g:s nivåyta är $\boldsymbol{n}$ en normalvektor till planet.

Planets ekvation är därmed

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{n}\cdot\big(\boldsymbol{r}-(1,1,0)\big)=0\\\Leftrightarrow\quad&\big(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},-1\big)\cdot\big((x,y,z)-(1,1,0)\big)=0\\\Leftrightarrow\quad&\tfrac{1}{2}x-\tfrac{1}{2}y-z=0.\end{aligned}$$

c) En nivåkurva till f består av alla punkter (x,y) som uppfyller sambandet

$$f(x,y)=C$$

för något fixt C.

Punkten $p=(1,1)$ tillhör nivåkurvan med C-värdet

$$C=f(1,1)=\frac{1-1}{1+1}=0.$$

För att bestämma tangentlinjen till nivåkurvan i $p=(1,1)$ behöver vi veta nivåkurvans riktning $\boldsymbol{v}$ i punkten p. Den riktningen vet vi är vinkelrät mot nivåkurvans normal $\boldsymbol{n}$ som ges av gradienten

$$\boldsymbol{n}=\nabla f(p)=\big(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\big),$$

så $\boldsymbol{v}$ får vi exempelvis till $\boldsymbol{v}=\big(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\big)$. En parametrisering av tangentlinjen är

$$\boldsymbol{r}(t)=p+t\,\boldsymbol{v}=(1,1)+t\big(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\big).$$

12.7.8 Bestäm en ekvation för tangentplanet till nivåytan av funktionen

$$f(x,y,z) = \cos(x+2y+3z)$$

i punkten $(\frac{1}{2}\pi, \pi, \pi)$.

En normalvektor till nivåytan i punkten $p = (\frac{1}{2}\pi, \pi, \pi)$ ges av gradienten

$$\boldsymbol{n} = \nabla f(p) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(p), \frac{\partial f}{\partial y}(p), \frac{\partial f}{\partial z}(p)\Big)$$

där

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(p) &= -\sin(x+2y+3z)\Big|_{\substack{x=\pi/2\\ y=z=\pi}} = 1,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(p) &= -\sin(x+2y+3z)\Big|_{\substack{x=\pi/2\\ y=z=\pi}} = 2,\\
\frac{\partial f}{\partial z}(p) &= -\sin(x+2y+3z)\Big|_{\substack{x=\pi/2\\ y=z=\pi}} = 3.
\end{aligned}$$

Tangentplanets ekvation är

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r}-p) = 0\\
\Leftrightarrow\qquad &(1,2,3)\cdot\big((x,y,z)-(\tfrac{1}{2}\pi,\pi,\pi)\big) = 0\\
\Leftrightarrow\qquad &x+2y+3z = \tfrac{11}{2}\pi.
\end{aligned}$$

12.7.12 Bestäm ändringstakten av funktionen

$$f(x,y) = \frac{x}{1+y}$$

vid punkten $(0,0)$ i riktning $(1,-1)$.

Vi söker f:s riktningsderivata i riktningen $\boldsymbol{v} = (1,-1)$, d.v.s.

$$D_{\boldsymbol{v}} f(0,0) = \boldsymbol{e}_v \cdot \nabla f(0,0).$$

Vi har

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_v &= \frac{(1,-1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1),\\
\nabla f(0,0) &= \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\Big),\\
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \frac{1}{1+y}\Big|_{x=y=0} = 1,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \frac{x}{(1+y)^2}\Big|_{x=y=0} = 0.
\end{aligned}$$

Därmed är

$$D_{\boldsymbol{v}} f(0,0) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\cdot(1,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

12.7.14 Låt

$$f(x,y) = \log\|\boldsymbol{r}\|$$

där $\boldsymbol{r} = (x,y)$. Visa att

$$\nabla f = \frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^2}.$$

Vi skriver ut f i x och y,

$$f(x,y) = \log\|\boldsymbol{r}\| = \log\sqrt{x^2+y^2} = \tfrac{1}{2}\log(x^2+y^2).$$

Gradienten är

$$\nabla f = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big),$$

där

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\frac{1}{2}}{x^2+y^2} \cdot 2x = \frac{x}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2}}{x^2+y^2} \cdot 2y = \frac{y}{x^2+y^2}.$$

Alltså är

$$\nabla f = \Big(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\Big) = \frac{(x,y)}{x^2+y^2} = \frac{\boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^2}.$$

12.7.17 I vilka riktningar från punkten $(2,0)$ har funktionen

$$f(x,y) = xy$$

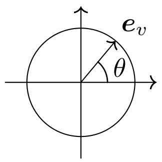
en ändringstakt på -1? Finns det riktningar i vilka ändringstakten är -3? eller -2?

Ändringstakten i en riktning $\boldsymbol{v}$ ges av riktningsderivatan

$$D_{\boldsymbol{v}} f(2,0) = \boldsymbol{e}_v \cdot \nabla f(2,0).$$

En enhetsvektor i $\boldsymbol{R}^2$ kan alltid skrivas i formen

$$\boldsymbol{e}_v = (\cos\theta, \sin\theta)$$



där $0 \le \theta < 2\pi$.

Gradienten är

$$\nabla f(2,0) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x}(2,0), \frac{\partial f}{\partial y}(2,0)\Big)$$
$$= \Big(y\,\Big|_{\substack{x=2\\y=0}}, x\,\Big|_{\substack{x=2\\y=0}}\Big) = (0,2).$$

Riktningsderivatan blir alltså

$$\boldsymbol{e}_v \cdot \nabla f(2,0) = (\cos\theta, \sin\theta)\cdot(0,2) = 2\sin\theta.$$

Denna derivata är -1 då

$$\sin\theta = -\frac{1}{2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \theta = \tfrac{7}{6}\pi \quad \text{eller} \quad \theta = \tfrac{11}{6}\pi$$

med motsvarande riktningar

$$\big(\cos\tfrac{7}{6}\pi, \sin\tfrac{7}{6}\pi\big) = \big(-\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}\big),$$
$$\big(\cos\tfrac{11}{6}\pi, \sin\tfrac{11}{6}\pi\big) = \big(\tfrac{\sqrt{3}}{2}, -\tfrac{1}{2}\big).$$

Uttrycket $2\sin\theta$ kan aldrig anta värdet -3 eftersom $-1 \le \sin\theta \le 1$, däremot antas värdet -2 då $\sin\theta = -1$, d.v.s. då $\theta = \frac{3}{2}\pi$ vilket svarar mot riktningen

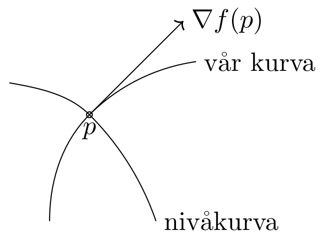
$$\big(\cos\tfrac{3}{2}\pi, \sin\tfrac{3}{2}\pi\big) = (0,-1).$$

12.7.22 Bestäm en ekvation för den kurva i x,y-planet som passerar genom punkten $(1,1)$ och skär alla nivåkurvor till

$$f(x,y) = x^4 + y^2$$

under rät vinkel.

Om vår kurva ska skära en nivåkurva i punkten p vinkelrätt så måste den ha en riktning som är parallell med nivåkurvans normal $\nabla f(p)$.



Antar vi att vi parametriserat vår kurva med $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, så måste vi alltså ha att

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) \quad \text{är parallell med} \quad \nabla f\big(\boldsymbol{r}(t)\big)$$

för alla parametervärden t.

Analytiskt betyder detta att det ska finnas en skalär $k(t) \neq 0$ så att

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) = k(t)\, \nabla f\big(\boldsymbol{r}(t)\big). \tag{$\dagger$}$$

Skalärfunktionen $k(t)$ är lite besvärande att hela tiden bära med sig, speciellt eftersom den saknar geometrisk betydelse (d.v.s. oavsett hur den ser ut påverkar den inte kurvans form utan bara hur parametriseringen ser ut).

Ett sätt att bli av med den är att tänka sig att vi parametriserar om vår kurva till

$$\boldsymbol{r}\big(u(t)\big), \tag{$*$}$$

där $u\colon \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ är en en-entydig funktion. ($*$) beskriver fortfarande geometriskt samma kurva, det är bara det att istället för att en punkt på kurvan svarar mot parametervärdet t_0 svarar den nu mot ett annat parametervärde.

Parallellvillkoret ($\dagger$) blir nu (med kedjeregeln)

$$\dot{\boldsymbol{r}}\big(u(t)\big) \cdot \dot{u}(t) = k(t)\, \nabla f\big(\boldsymbol{r}(u(t))\big).$$

Om vi väljer $u(t)$ så att $\dot{u}(t) = k(t)$ förenklas detta till

$$\dot{\boldsymbol{r}}\big(u(t)\big) = \nabla f\big(\boldsymbol{r}(u(t))\big). \tag{$\ddagger$}$$

Att vi verkligen kan välja $u(t)$ på detta sätt ser vi genom att sätta

$$u(t) = \int_0^t k(\tau)\, d\tau,$$

för då är $\dot{u}(t) = k(t)$. I och med att $\dot{u}(t) = k(t) \neq 0$ så måste $u(t)$ hela tiden antingen vara strängt växande eller avtagande, d.v.s. en-entydig.

Istället för att hela tiden skriva $\boldsymbol{r}\big(u(t)\big)$ kan vi anta att vi redan från början valt denna parametrisering och skriva $\boldsymbol{r}(t)$.

Om vi nu ska skriva ($\ddagger$) i vektorform så har vi

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}}(t) &= \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} \\ \nabla f\big(\boldsymbol{r}(t)\big) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) & \frac{\partial f}{\partial y}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x(t)^3 & 2y(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

($\ddagger$) blir därför

$$\dot{x}(t) = 4\, x(t)^3, \tag{1}$$
$$\dot{y}(t) = 2\, y(t). \tag{2}$$

Vi ska nu lösa dessa två differentialekvationer. Vi kan anta att kurvan går genom punkten $(1,1)$ då $t = 0$, d.v.s. $\big(x(0), y(0)\big) = (1,1)$.

Ekvation (1) kan skrivas

$$\frac{\dot{x}(t)}{4x(t)^3} = 1.$$

Om vi integrerar båda led m.a.p. t från 0 till t fås

$$\begin{aligned} \text{VL} &= \int_0^t \frac{\dot{x}(t)}{4x(t)^3}\, dt = \{\, w = x(t);\; dw = \dot{x}(t)\, dt \,\} \\ &= \int_1^{x(t)} \frac{dw}{4w^3} = -\frac{1}{8x(t)^2} + \frac{1}{8} \\ \text{HL} &= \int_0^t dt = t \end{aligned}$$

vilket ger

$$-\frac{1}{8x(t)^2} + \frac{1}{8} = t \qquad \Leftrightarrow \qquad x(t) = \frac{\pm 1}{\sqrt{1-8t}}$$

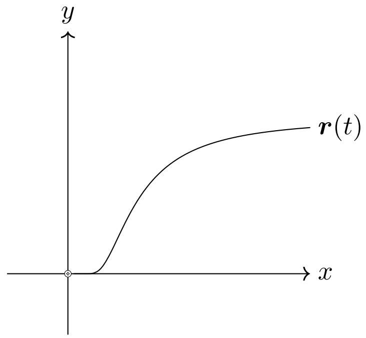
där minustecknet förkastas eftersom vi måste ha att $x(0) = 1$.

På liknande sätt löser vi (2) och får

$$y(t) = e^{2t}.$$

Vår kurva har alltså parametriseringen

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-8t}} \\ e^{2t} \end{pmatrix} \qquad (-\infty < t < \tfrac{1}{8})$$



Anm. Man kan eliminera parametern t och få fram att kurvan också kan skrivas som

$$y = \exp\Big(\frac{1}{4x^2} - \tfrac{1}{4}\Big) \qquad (x > 0).$$

12.8.4 Beräkna derivatan $\dfrac{\partial y}{\partial z}$ om y uppfyller följande samband

$$e^{yz} - x^2 z \log y = \pi.$$

Vilka villkor på (x, y, z) kan garantera existensen av en lösning $y = y(x, z)$ med ovanstående derivata.

Om vi börjar med derivatan så ska vi alltså derivera det implicita sambandet med avseende på z och med y som en funktion av x och z, d.v.s. derivera

$$e^{y(x,z)\,z} - x^2 z \log y(x, z) = \pi.$$

Vi får

$$e^{yz}\Big(\frac{\partial y}{\partial z}\cdot z + y\cdot 1\Big) - \Big(x^2\cdot 1\cdot \log y + x^2 z\cdot \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial z}\Big) = 0.$$

Vi samlar ihop $\frac{\partial y}{\partial z}$,

$$\begin{aligned} &\Big(e^{yz} z - \frac{x^2 z}{y}\Big)\frac{\partial y}{\partial z} + y\,e^{yz} - x^2 \log y = 0 \\ \Leftrightarrow \qquad &\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{x^2 \log y - y\,e^{yz}}{z\,e^{yz} - \dfrac{x^2 z}{y}}. \end{aligned}$$

Detta givetvis under förutsättning att vi verkligen kan skriva $y = y(x, z)$ lokalt.

Det implicita sambandet kan vi skriva som en nollställeyta genom att sätta

$$f(x, y, z) = e^{yz} - x^2 z \log y - \pi.$$

De punkter som uppfyller det implicita sambandet uppfyller också $f(x, y, z) = 0$. Enligt implicita funktionssatsen kan vi utifrån $f = 0$ skriva $y = y(x, z)$ lokalt om

$$\frac{\partial f}{\partial y} \neq 0,$$

d.v.s. om

$$\frac{\partial f}{\partial y} = z\,e^{yz} - \frac{x^2 z}{y} \neq 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad z\Big(e^{yz} - \frac{x^2}{y}\Big) \neq 0.$$

12.8.8 Beräkna derivatan $\frac{\partial z}{\partial x}$ om z uppfyller följande samband

$$F(x^2 - z^2, y^2 + xz) = 0,$$

där F är kontinuerligt deriverbar.

Vilka villkor på (x, y, z) kan garantera existensen av en lösning $z = z(x, y)$ med ovanstående derivata.

Vi deriverar det implicita sambandet med avseende på x och med $z = z(x, y)$. Kedjeregeln ger

$$\begin{aligned} &F_1(x^2 - z^2, y^2 + xz)\cdot\Big(2x - 2z\,\frac{\partial z}{\partial x}\Big) + \\ &F_2(x^2 - z^2, y^2 + xz)\cdot\Big(1\cdot z + x\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\Big) = 0. \end{aligned}$$

Vi samlar ihop $\frac{\partial z}{\partial x}$,

$$\Big(-2z \cdot F_1(\quad) + x \cdot F_2(\quad)\Big)\frac{\partial z}{\partial x} + \Big(2x \cdot F_1(\quad) + z \cdot F_2(\quad)\Big) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2x \cdot F_1(\quad) - z \cdot F_2(\quad)}{-2z \cdot F_1(\quad) + x \cdot F_2(\quad)}.$$

Den mängd som definieras av det implicita sambandet är en nollställeyta till funktionen

$$G(x, y, z) = F(x^2 - z^2, y^2 + xz).$$

Enligt implicita funktionssatsen kan vi garantera att $z = z(x, y)$ lokalt om

$$\frac{\partial G}{\partial z} \neq 0,$$

d.v.s. om

$$\frac{\partial}{\partial z} F(x^2 - z^2, y^2 + xz) = F_1(\quad) \cdot (-2z) + F_2(\quad) \cdot x \neq 0.$$

12.8.11 Beräkna derivatan $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z$ om x uppfyller sambanden

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 &= 1 \\ x + 2y + 3z + 4w &= 2. \end{aligned}$$

Vilka villkor på (x, y, z, w) kan garantera existensen av en lösning $x = x(y, z)$ med ovanstående derivata.

Den mängd som bestäms av de två implicita sambanden är nollställeytan till funktionen

$$\boldsymbol{F}(x, y, z, w) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 - 1 \\ x + 2y + 3z + 4w - 2 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $\boldsymbol{F}$ är en funktion med värdemängd i $\boldsymbol{R}^2$ kan vi nästan undantagsvist skriva två av variablerna x, y, z, w som funktion av de övriga två. I vårt fall

$$\begin{aligned} x &= x(y, z), \\ w &= w(y, z). \end{aligned}$$

Detta funktionsberoende kan vi dock bara garantera, enligt implicita funktionssatsen, i de punkter där

$$\det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x, w)}\Big) \neq 0,$$

d.v.s. där

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial w} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial w} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2w \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 8x - 2w \neq 0.$$

Den sökta derivatan får vi genom att derivera de två implicita sambanden med avseende på y och med $x = x(y, z)$ och $w = w(y, z)$.

$$\begin{aligned} 2x\,\tfrac{\partial x}{\partial y} + 2y + 0 + 2w\,\tfrac{\partial w}{\partial y} &= 0 \\ \tfrac{\partial x}{\partial y} + \ \ 2 + 0 + \ \ 4\,\tfrac{\partial w}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem i de två okända $\frac{\partial x}{\partial y}$ och $\frac{\partial w}{\partial y}$.

$$\begin{pmatrix} 2x & 2w \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Cramers regel ger

$$\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} -2y & 2w \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & 2w \\ 1 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{-8y + 4w}{8x - 2w}.$$

12.8.12 Beräkna derivatan $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ om u uppfyller sambanden

$$x^2y + y^2u - u^3 = 0$$
$$x^2 + yu = 1.$$

Vilka villkor på (x, y, u) kan garantera existensen av en lösning $u = u(x)$ med ovanstående derivata.

Mängden som definieras av de två sambanden är nollställeytan till funktionen

$$\boldsymbol{F}(x, y, u) = \begin{pmatrix} x^2y + y^2u - u^3 \\ x^2 + yu - 1 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $\boldsymbol{F}$:s värdemängd är i $\boldsymbol{R}^2$ kan vi nästan överallt skriva två av variablerna som funktion av den tredje. I vårt fall

$$y = y(x),$$
$$u = u(x).$$

Ett tillräckligt villkor för detta är att

$$\det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(y,u)}\Big) \neq 0,$$

enligt implicita funktionssatsen, d.v.s.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial u} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial u} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 + 2yu & y^2 - 3u^2 \\ u & y \end{vmatrix}$$
$$= (x^2 + 2yu)y - u(y^2 - 3u^2) = x^2y + y^2u + 4u^2 \neq 0.$$

Derivatan $\frac{du}{dx}$ får vi genom att derivera de två implicita sambanden m.a.p. x.

$$\begin{aligned} 2x\cdot y + x^2\tfrac{dy}{dx} + 2y\tfrac{dy}{dx}\cdot u + y^2\cdot\tfrac{du}{dx} - 3u^2\tfrac{du}{dx} &= 0 \\ 2x + \tfrac{dy}{dx}\cdot u + \quad y\cdot\tfrac{du}{dx} &= 0 \end{aligned}$$

Detta linjära ekvationssystem kan vi sammanfatta som

$$\begin{pmatrix} x^2 + 2yu & y^2 - 3u^2 \\ u & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2xy \\ -2x \end{pmatrix}.$$

Cramers regel ger

$$\frac{du}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} x^2 + 2yu & -2xy \\ u & -2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x^2 + 2yu & y^2 - 3u^2 \\ u & y \end{vmatrix}} = \frac{(x^2 + 2yu)(-2x) - u(-2xy)}{(x^2 + 2yu)y - u(y^2 - 3u^2)}$$
$$= \frac{-2x^3 - 2xyu}{x^2y + y^2u + 3u^3}$$

12.8.14 Nära vilka punkter (r, s) kan transformationen

$$x = r^2 + 2s$$
$$y = s^2 - 2r$$

lösas med avseende på r och s som funktioner av x och y?

Beräkna värdet av de första partiella derivatorna av lösningen i origo.

Vi kan skriva om sambanden mellan r, s, x och y som nollställeytan till funktionen

$$\boldsymbol{F}(x, y, r, s) = \begin{pmatrix} x - r^2 - 2s \\ y - s^2 + 2r \end{pmatrix}.$$

Funktionen $\boldsymbol{F}$ har värdemängd i $\boldsymbol{R}^2$ varför vi kan skriva

$$r = r(x, y)$$
$$s = s(x, y)$$

kring de flesta punkter. Enligt implicita funktionssatsen är ett tillräckligt villkor för detta att

$$\det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(r,s)}\Big) \neq 0,$$

d.v.s.

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial r} & \frac{\partial F_1}{\partial s} \\ \frac{\partial F_2}{\partial r} & \frac{\partial F_2}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2r & -2 \\ 2 & -2s \end{vmatrix} = 4rs + 4 \neq 0.$$

Alltså, nära punkter (r, s) där $rs \neq -1$ kan vi skriva $r = r(x, y)$ och $s = s(x, y)$.

Eftersom vi ska beräkna alla partialderivator gör vi det med dem ihopsamlade i Jacobimatrisen $\frac{\partial(r,s)}{\partial(x,y)}$. För att göra härledningen någorlunda kompakt inför vektorbeteckningarna

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= (r, s), \\ \boldsymbol{x} &= (x, y). \end{aligned}$$

Vi deriverar det implicita sambandet $\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x})\big) = \boldsymbol{0}$ med avseende på $\boldsymbol{x}$. Kedjeregeln ger

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{r}} \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \boldsymbol{x}} = -\Big(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{r}}\Big)^{-1} \frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}}.$$

Alltså är

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial r} & \frac{\partial F_1}{\partial s} \\ \frac{\partial F_2}{\partial r} & \frac{\partial F_2}{\partial s} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{4rs+4} \begin{pmatrix} -2s & 2 \\ -2 & -2r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{4rs+4} \begin{pmatrix} -2s & 2 \\ -2 & -2r \end{pmatrix} \end{aligned}$$

och i origo är

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial s}{\partial x} & \frac{\partial s}{\partial y} \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

12.8.18 Visa att ekvationerna

$$\begin{cases} x\,e^y + uz - \cos v = 2 \\ u \cos y + x^2 v - yz^2 = 1 \end{cases}$$

kan lösas i u och v som funktioner av x, y, z i närheten av punkten P_0 där $(x, y, z) = (2, 0, 1)$ och $(u, v) = (1, 0)$. Beräkna även $\big(\frac{\partial u}{\partial z}\big)_{x,y}$ i $(x, y, z) = (2, 0, 1)$.

Lösningsmängden till ekvationerna är nollställemängden till funktionen

$$\boldsymbol{F}(x, y, z, u, v) = \begin{pmatrix} x\,e^y + uz - \cos v - 2 \\ u \cos y + x^2 v - yz^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Enligt implicita funktionssatsen kan vi lösa ut

$$\begin{aligned} u &= u(x, y, z) \\ v &= v(x, y, z) \end{aligned}$$

om

$$\det\Big(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(u, v)}\Big) \neq 0,$$

d.v.s. om

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} z & \sin v \\ \cos y & x^2 \end{vmatrix} \\ &= zx^2 - \cos y \, \sin v \neq 0. \end{aligned}$$

I punkten $(x, y, z, u, v) = (2, 0, 1, 1, 0)$ är denna determinant

$$1 \cdot 2^2 - \cos 0 \cdot \sin 0 = 4 \neq 0.$$

Alltså kan u och v lösas ut i termer av x, y och z lokalt kring $(x, y, z) = (2, 0, 1)$.

Den partiella derivatan får vi genom att derivera de två implicita sambanden m.a.p. z och med $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$.

$$\begin{aligned} 0 + \frac{\partial u}{\partial z} \cdot z + u \cdot 1 - (-\sin v)\frac{\partial v}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial z} \cdot \cos y + x^2 \frac{\partial v}{\partial z} - y \cdot 2z &= 0 \end{aligned}$$

Vi sammanfattar

$$\begin{pmatrix} z & \sin v \\ \cos y & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u \\ 2yz \end{pmatrix}.$$

Cramers regel ger

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \begin{vmatrix} -u & \sin v \\ 2yz & x^2 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} z & \sin v \\ \cos y & x^2 \end{vmatrix} = \frac{-u \cdot x^2 - 2yz \sin v}{x^2 z - \cos y \cdot \sin v}$$

I punkten $(x, y, z, u, v) = (2, 0, 1, 1, 0)$ är

$$\Big(\frac{\partial u}{\partial z}\Big)_{x,y} = \frac{-1 \cdot 2^2 - 2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot \sin 0}{2^2 \cdot 1 - \cos 0 \cdot \sin 0} = -1.$$