Lektion 4, Flervariabelanalys den 25 januari 2000

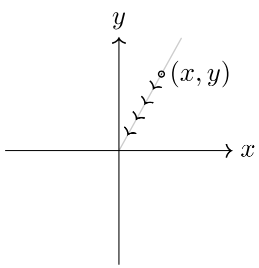
12.2.2 Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2}$$

eller förklara varför gränsvärdet inte existerar.

För att gränsvärdet ska existera måste gränsvärdesuttrycket närma sig ett och samma värde oavsett hur vi låter $(x,y)\to(0,0)$.

Ett första test kan därför vara att låta (x,y) närma sig origo längs en rät linje.



En rät linje genom origo kan allmänt skrivas i parameterformen

$$(x,y) = t(a,b) \qquad (t \text{ parameter}),$$

där (a,b) är riktningsvektorn för linjen och $t=0$ svarar mot origo. När vi närmar oss origo längs denna linje blir gränsvärdet

$$\lim_{t\to 0^+} \sqrt{(at)^2+(bt)^2} = \lim_{t\to 0^+} |t|\sqrt{a^2+b^2} = 0.$$

Eftersom detta gränsvärde är oberoende av a och b spelar det ingen roll i vilken riktning vi närmar oss origo.

Detta betyder dock inte att gränsvärdet måste existera (se det viktiga exempel 3 avsnitt 12.2 i kursboken), utan vi kan faktiskt inte ännu dra någon slutsats därom.

Vår misstanke kan iallafall vara att gränsvärdet existerar och är lika med 0. För att visa detta är ett sätt att vi går tillbaka till definitionen av gränsvärde och visar att den är uppfylld.

Definitionen av gränsvärde lyder:

> Oavsett hur litet $\varepsilon>0$ vi väljer så ska det alltid finnas ett $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ så att
>
> $$|f(x,y)-0|<\varepsilon \quad \text{för alla } (x,y) \text{ s.a. } 0<|(x,y)-(0,0)|<\delta.$$

I vårt fall ska vi välja $\delta>0$ s.a.

$$\sqrt{x^2+y^2}<\varepsilon \quad \text{för alla } (x,y) \text{ s.a. } 0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta.$$

Om vi väljer $\delta=\varepsilon$ så är definitionen uppfylld. Vi har därmed visat att gränsvärdet existerar och är lika med 0.

Anm. En kortare räkning är

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{x^2+y^2} &= \{\, \sqrt{\cdot} \text{ är kontinuerlig} \,\}\\ &= \sqrt{\lim_{x,y\to 0}(x^2+y^2)} = \sqrt{\lim_{x,y\to 0} x^2 + \lim_{x,y\to 0} y^2}\\ &= \sqrt{\lim_{x\to 0} x^2 + \lim_{y\to 0} y^2} = 0.\end{aligned}$$

12.2.4 Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{x}{x^2+y^2}$$

eller förklara varför gränsvärdet inte existerar.

Vi utför ett första test genom att låta $(x,y)\to(0,0)$ längs en rät linje. En parametrisering av en allmän linje genom origo är

$$(x,y) = t(a,b) \quad (t \text{ parameter}),$$

och när vi närmar oss origo längs denna linje blir gränsvärdet

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{at}{(at)^2+(bt)^2} = \lim_{t\to 0^+} \frac{a}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{t} = \begin{cases} \infty, & \text{om } a>0 \\ 0, & \text{om } a=0 \\ -\infty, & \text{om } a<0 \end{cases}$$

Detta gränsvärdet existerar inte och därför kan inte gränsvärdet i uppgiftstexten existera.

12.2.11 Bestäm gränsvärdet

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4}$$

eller förklara varför gränsvärdet inte existerar.

Vi börjar med det obligatoriska testet när $(x,y)\to(0,0)$ längs en rät linje. Vi kan då skriva x och y i parameterformen

$$(x,y) = t(a,b) \quad (t \text{ parameter}).$$

Gränsvärdet blir då

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{(at)^2(bt)^2}{(at)^2+(bt)^4} = \lim_{t\to 0^+} \frac{a^2b^2\,t^4}{a^2t^2+b^4t^4} = \lim_{t\to 0^+} \frac{a^2b^2\,t^2}{a^2+b^4t^2} = 0$$

som är oberoende av a och b, d.v.s. av i vilken riktning vi närmar oss origo. Precis som sagts tidigare räcker inte detta för att bevisa att gränsvärdet existerar. Testet kan bara användas för att sortera bort gränsvärden som inte existerar.

Istället för att gå tillbaka till definitionen av gränsvärde för att bevisa att gränsvärdet existerar kan vi använda oss av instängningsprincipen. Vi har att

$$0 \le \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} \le \frac{x^2y^2}{x^2+0} = y^2.$$

Eftersom HL $\to 0$ då $x,y\to 0$ så ger instängningsprincipen att

$$\lim_{x,y\to 0} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} = 0.$$

12.2.14 Hur ska funktionen

$$f(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x-y} \qquad (x\ne y)$$

definieras på linjen $x=y$ så att den blir kontinuerlig i hela x,y-planet?

Med en polynomdivision

$$\begin{array}{rl|l} & x^2+y^2+xy & \\ \hline & x^3-y^3 & \;x-y \\ \cline{3-3} & x^3-x^2y & \\ \cline{1-2} & -y^3+x^2y & \\ & -y^3+xy^2 & \\ \cline{1-2} & x^2y-xy^2 & \\ & x^2y-xy^2 & \\ \cline{1-2} & 0 & \end{array}$$

får vi att

$$\frac{x^3-y^3}{x-y} = x^2+y^2+xy \qquad (x\ne y).$$

Om vi sätter $F(x,y)=x^2+y^2+xy$ så har vi alltså att

$$f(x,y) = F(x,y) \qquad \text{för } x\ne y.$$

Genom att definiera

$$f(x,y) = F(x,y)$$

även då $x=y$ så får vi att f blir kontinuerlig i hela planet eftersom polynomet F är kontinuerlig överallt.

12.3.2 Räkna ut första ordningens partialderivator av funktionen

$$f(x,y) = xy + x^2$$

i punkten $(2,0)$.

Funktionen f beror av två variabler x och y, och har därför två partialderivator $\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$.

När vi räknar ut $\frac{\partial f}{\partial x}$ deriverar vi f med avseende på x och betraktar y som en konstant,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2x.$$

På samma sätt får vi $\frac{\partial f}{\partial y}$ genom att derivera med avseende på y och betraktande x som en konstant,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + 0 = x.$$

Partialderivatornas värde i punkten $(x,y) = (2,0)$ får vi genom att stoppa in $x = 2$ och $y = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(2,0) &= (y+2x)\Big|_{\substack{x=2\\y=0}} = 4,\\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,0) &= x\Big|_{\substack{x=2\\y=0}} = 2. \end{aligned}$$

12.3.5 Räkna ut första ordningens partialderivator av funktionen

$$z = \arctan\frac{y}{x}$$

i punkten $(-1,1)$.

De två partialderivatorna får vi genom att derivera med avseende på variabeln i fråga,

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2},\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

Partialderivatornas värde i punkten $(-1,1)$ är

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(-1,1) &= \frac{-y}{x^2+y^2}\Big|_{\substack{x=-1\\y=1}} = \frac{-1}{(-1)^2+1^2} = -1/2,\\ \frac{\partial z}{\partial y}(-1,1) &= \frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{\substack{x=-1\\y=1}} = \frac{-1}{(-1)^2+1^2} = -1/2. \end{aligned}$$

12.3.6 Räkna ut första ordningens partialderivator av funktionen

$$w = \log\big(1 + e^{xyz}\big)$$

i punkten $(2, 0, -1)$.

Vi har tre partialderivator; en för varje variabel

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= \frac{1}{1+e^{xyz}} \cdot \big(0 + e^{xyz} \cdot yz\big) = \frac{e^{xyz}}{1+e^{xyz}} \cdot yz,\\
\frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{1}{1+e^{xyz}} \cdot \big(0 + e^{xyz} \cdot xz\big) = \frac{e^{xyz}}{1+e^{xyz}} \cdot xz,\\
\frac{\partial w}{\partial z} &= \frac{1}{1+e^{xyz}} \cdot \big(0 + e^{xyz} \cdot xy\big) = \frac{e^{xyz}}{1+e^{xyz}} \cdot xy.
\end{aligned}$$

I punkten $(2, 0, -1)$ antar partialderivatorna värdena

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x}(2,0,-1) &= \frac{e^{xyz}}{1+e^{xyz}} \cdot yz\bigg|_{\substack{x=2\\y=0\\z=-1}} = \frac{1}{1+1} \cdot 0 \cdot (-1) = 0,\\
\frac{\partial w}{\partial y}(2,0,-1) &= \frac{e^{xyz}}{1+e^{xyz}} \cdot xz\bigg|_{\substack{x=2\\y=0\\z=-1}} = \frac{1}{1+1} \cdot 2 \cdot (-1) = -1\\
\frac{\partial w}{\partial z}(2,0,-1) &= \frac{e^{xyz}}{1+e^{xyz}} \cdot xy\bigg|_{\substack{x=2\\y=0\\z=-1}} = \frac{1}{1+1} \cdot 2 \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

12.3.12 Räkna första ordningens partialderivator av funktionen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 2y^2}{x - y} & \text{om } x \neq y,\\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

i punkten $(0, 0)$.

Enligt definitionen av partialderivata är

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h^2-0}{h-0} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1,\\
\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f(0,0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{0-2k^2}{0-k} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} 2 = 2.
\end{aligned}$$

12.3.14 Bestäm en ekvation för tangentplanet och normallinjen för funktionsytan till

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

i punkten $(1, 1)$.

För att bestämma normallinjen behöver vi en punkt P på linjen och en riktningsvektor $\boldsymbol{n}$ till linjen. Normallinjens ekvation är då

$$\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{OP} + t\,\boldsymbol{n} \qquad (t \text{ parameter}).$$

Eftersom vi söker normallinjen i punkten $(1, 1)$ måste linjen gå genom punkten

$$P = \big(1, 1, f(1,1)\big) = (1, 1, 0).$$

Normallinjens riktning i samma punkt ges av vektorn

$$\boldsymbol{n} = \Bigl(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1), -1\Bigr),$$

där

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1\cdot(x+y) - 1\cdot(x-y)}{(x+y)^2}\Big|_{x=y=1} = \frac{2y}{(x+y)^2}\Big|_{x=y=1} = 1/2$$

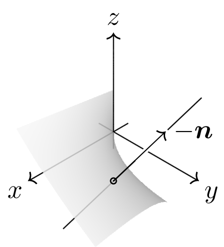
$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{(-1)\cdot(x+y) - 1\cdot(x-y)}{(x+y)^2}\Big|_{x=y=1} = \frac{-2x}{(x+y)^2}\Big|_{x=y=1} = -1/2$$

vilket ger

$$\boldsymbol{n} = \bigl(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1\bigr).$$

Normallinjens ekvation är alltså

$$\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{OP} + r\,\boldsymbol{n} = (1,1,0) + t\,\bigl(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1\bigr).$$



För att bestämma tangentplanets ekvation behöver vi en punkt i planet och planets normalvektor. En punkt i planet är tangeringspunkten

$$P = \bigl(1, 1, f(1,1)\bigr) = (1,1,0).$$

Planets normalvektor är normalen till ytan

$$\boldsymbol{n} = \Bigl(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1), -1\Bigr) = \bigl(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1\bigr).$$

Planets ekvation är

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{r} - \overrightarrow{OP}) = 0\\
\Leftrightarrow\quad &\bigl(\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}, -1\bigr)\cdot\bigl((x,y,z) - (1,1,0)\bigr) = 0\\
\Leftrightarrow\quad &\tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{2}y - z = 0.
\end{aligned}$$

12.3.22 Bestäm en ekvation för tangentplanet och normallinjen för funktionsytan till

$$f(x,y) = \sqrt{1 + x^3y^2}$$

i punkten $(2,1)$.

En punkt på normallinjen är

$$P = \bigl(2, 1, f(2,1)\bigr) = (2,1,3).$$

Normallinjens riktning är parallell med funktionsytans normal

$$\boldsymbol{n} = \Bigl(\frac{\partial f}{\partial x}(2,1), \frac{\partial f}{\partial y}(2,1), -1\Bigr),$$

där

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^3y^2}}\cdot 3x^2y^2\Big|_{\substack{x=2\\y=1}} = 2$$

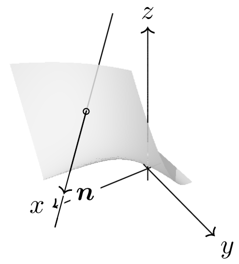
$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \frac{1}{2\sqrt{1+x^3y^2}}\cdot 2x^3y\Big|_{\substack{x=2\\y=1}} = 8/3$$

vilket ger

$$\boldsymbol{n} = (2, \tfrac{8}{3}, -1).$$

Normallinjens ekvation är

$$\boldsymbol{r}(t) = \overrightarrow{OP} + t\,\boldsymbol{n} = (2,1,3) + t\,(2, \tfrac{8}{3}, -1) \qquad (t \text{ parameter}).$$



En punkt i tangentplanet är

$$P = (2, 1, 3),$$

och planets normalvektor är parallell med funktionsytans normal

$$\boldsymbol{n} = (2, \tfrac{8}{3}, -1).$$

Planets ekvation är därför

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{r} - \overrightarrow{OP}) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad &(2, \tfrac{8}{3}, -1) \cdot \big((x, y, z) - (2, 1, 3)\big) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad &2x + \tfrac{8}{3}y - z = \tfrac{11}{3}. \end{aligned}$$

12.3.24 Bestäm alla horisontella plan som tangerar ytan med ekvationen

$$z = xye^{-(x^2+y^2)/2}.$$

Till vilka punkter är de tangentplan?

Ett horisontellt plan har normalvektorn $(0,0,1)$. För att ett sådant plan ska vara ett tangentplan så måste funktionsytans normal vara parallell med $(0,0,1)$, d.v.s.

$$\Big(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\Big) = k\,(0,0,1)$$

för något $k \neq 0$. Detta ger villkoret

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \qquad (*)$$

Vi har att

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= y\,e^{-(x^2+y^2)/2} + xy\,e^{-(x^2+y^2)/2} \cdot (-x) = (1-x^2)y\,e^{-(x^2+y^2)/2}, \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= (1-y^2)x\,e^{-(x^2+y^2)/2}. \end{aligned}$$

Eftersom exponentialfunktionen aldrig är noll så leder $(*)$ till ekvationssystemet

$$(1-x^2)y = 0 \qquad (1)$$
$$(1-y^2)x = 0 \qquad (2)$$

Både (1) och (2) är uppfyllda omm åtminstone en av faktorerna i varje ekvation är noll. I varje ekvation finns två faktorer vilket ger 4 kombinationsmöjligheter.

$1-x^2 = 1-y^2 = 0:$ Detta ger punkterna $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,1)$ och $(-1,-1)$.

$1-x^2 = x = 0:$ Saknar lösning.

$y = 1-y^2 = 0:$ Saknar lösning.

$y = x = 0:$ Detta ger punkten $(0,0)$.

I dessa punkter är alltså tangentplanen horisontella. Tangentplanens ekvationer blir

$(1,1):\quad z = f(1,1) = e^{-1}$

$(1,-1):\quad z = f(1,-1) = -e^{-1}$

$(-1,1):\quad z = f(-1,1) = -e^{-1}$

$(-1,-1):\quad z = f(-1,-1) = e^{-1}$

$(0,0):\quad z = f(0,0) = 0$

12.4.4 Bestäm andra ordningens partialderivator av

$$z = \sqrt{3x^2 + y^2}.$$

Första ordningens partialderivator är

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{3x^2+y^2}} \cdot 6x = \frac{3x}{\sqrt{3x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{3x^2+y^2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{3x^2+y^2}}$$

Andra ordningens partialderivator får vi genom att derivera en gång till,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{3x}{\sqrt{3x^2+y^2}} \\
&= \frac{3\cdot\sqrt{3x^2+y^2} - 3x \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x^2+y^2}} \cdot 6x}{\left(\sqrt{3x^2+y^2}\,\right)^2} \\
&= \frac{3(3x^2+y^2) - 9x^2}{\left(3x^2+y^2\right)^{3/2}} = \frac{3y^2}{\left(3x^2+y^2\right)^{3/2}} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{y}{\sqrt{3x^2+y^2}} \\
&= \frac{1\cdot\sqrt{3x^2+y^2} - y \cdot \frac{1}{2\sqrt{3x^2+y^2}} \cdot 2y}{\left(\sqrt{3x^2+y^2}\,\right)^2} \\
&= \frac{3x^2+y^2-y^2}{\left(3x^2+y^2\right)^{3/2}} = \frac{3x^2}{\left(3x^2+y^2\right)^{3/2}} \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{y}{\sqrt{3x^2+y^2}} \\
&= -\frac{y}{2\left(3x^2+y^2\right)^{3/2}} \cdot 6x = \frac{-3xy}{\left(3x^2+y^2\right)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Eftersom funktionen z är sammansättningen av polynomet $3x^2+y^2$ och kvadratroten är z kontinuerligt deriverbar av alla ordningar. Vi har därför att

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{-3xy}{\left(3x^2+y^2\right)^{3/2}}.$$

Anm. Vid en tentamen kan det vara bra att som en extra kontroll verkligen räkna ut $\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

12.4.10 Visa att funktionen

$$f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$$

är harmonisk överallt utom i origo.

Funktionen f är harmonisk om

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \tag{$*$}$$

Vi har

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1\cdot(x^2+y^2) - x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{-x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x\cdot(x^2+y^2)^2 - (-x^2+y^2)\cdot 2(x^2+y^2)2x}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{(x^2+y^2)\big(-2x(x^2+y^2) - 4x(-x^2+y^2)\big)}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{2x^3-6xy^2}{(x^2+y^2)^3} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{x}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-2x\cdot(x^2+y^2)^2 - (-2xy)\cdot 2(x^2+y^2)2y}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{(x^2+y^2)\big(-2x(x^2+y^2) + 8xy^2\big)}{(x^2+y^2)^4} \\
&= \frac{-2x^3+6xy^2}{(x^2+y^2)^3}.
\end{aligned}$$

Nu ser vi att $(*)$ är uppfylld då $(x,y) \neq (0,0)$, d.v.s. f är harmonisk.