Lektion 14, Flervariabelanalys den 16 februari 2000

15.3.2 Låt C vara den koniska spiralkurvan med parameterformen

$$\begin{aligned} x &= t\,\cos t \\ y &= t\,\sin t \qquad (0 \le t \le 2\pi). \\ z &= t \end{aligned}$$

Bestäm $\displaystyle\int_C z\,ds$.

Vi skriver kurvan i vektorform

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} t\,\cos t \\ t\,\sin t \\ t \end{pmatrix} \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

Båglängdselementet ds ges av formeln $ds = |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt$, där

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}}(t) &= \begin{pmatrix} \cos t - t\sin t \\ \sin t + t\cos t \\ 1 \end{pmatrix} \\ |\dot{\boldsymbol{r}}(t)| &= \sqrt{(\cos t - t\,\sin t)^2 + (\sin t + t\,\cos t)^2 + 1^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 t - 2t\cos t\sin t + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + 2t\cos t\sin t + t^2\cos^2 t + 1} \\ &= \sqrt{2+t^2} \end{aligned}$$

Linjeintegralen blir

$$\begin{aligned} \int_C z\,ds &= \int_0^{2\pi} t\sqrt{2+t^2}\;dt = \{\, u = 2+t^2;\; du = 2t\,dt \,\} \\ &= \tfrac{1}{2}\int_2^{2+4\pi^2} \sqrt{u}\;du = \tfrac{1}{3}\Big[\, u\sqrt{u}\,\Big]_2^{2+4\pi^2} \\ &= \tfrac{1}{3}\big((2+4\pi^2)\sqrt{2+4\pi^2} - 2\sqrt{2}\big). \end{aligned}$$

15.3.4 Visa att kurvan C som är skärningskurvan mellan den elliptiska paraboloiden $z = 2 - x^2 - 2y^2$ och den paraboliska cylindern $z = x^2$ i första oktanten från $(0,1,0)$ till $(1,0,1)$ har parametriseringen

$$\begin{aligned} x &= \cos u \\ y &= \sin u \qquad (0 \le u \le \pi/2), \\ z &= \cos^2 u \end{aligned}$$

och beräkna kurvans massa om dess densitet i punkten (x,y,z) är $\varrho(x,y,z) = xy$.

Skärningskurvan mellan de två ytorna uppfyller båda ytornas ekvationer

$$z = 2 - x^2 - 2y^2, \tag{1}$$

$$z = x^2. \tag{2}$$

(2) insatt i (1) ger

$$x^2 = 2 - x^2 - 2y^2 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + y^2 = 1.$$

Skärningskurvans projektion på x,y-planet är alltså en del av enhetscirkeln. Vi kan därför beskriva x- och y-koordinaten med standardparametriseringen

$$\begin{aligned} x &= \cos u, \\ y &= \sin u. \end{aligned}$$

Från (2) har vi

$$z = x^2 = \cos^2 u.$$

Detta är en beskrivning av hela skärningskurvan. Eftersom kurvstycket C ligger i första oktanten måste vi begränsa parameterintervallet så att

$$\begin{aligned} x &= \cos u \ge 0, \\ y &= \sin u \ge 0, \\ z &= \cos^2 u \ge 0, \end{aligned}$$

vilket ger att $u \in [0, \pi/2]$. Kurvan C kan alltså skrivas

$$\boldsymbol{r}(u) = \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ \cos^2 u \end{pmatrix} \qquad (0 \le u \le \pi/2).$$

Kurvans densitet ges av

$$\varrho(u) = \varrho\big(\boldsymbol{r}(u)\big) = x(u)y(u) = \cos u \sin u,$$

och kurvans båglängdselement ds är

$$\begin{aligned} ds &= |\dot{\boldsymbol{r}}(u)|\,du = \sqrt{(-\sin u)^2 + (\cos u)^2 + (2\cos u \sin u)^2}\;du \\ &= \sqrt{1 + 4\cos^2 u\,\sin^2 u}\;du. \end{aligned}$$

Kurvans totala massa blir

$$\begin{aligned} m &= \int_C \varrho(x,y,z)\,ds = \int_0^{\pi/2} \cos u \sin u \sqrt{1 + 4\cos^2 u \sin^2 u}\;du \\ &= \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}\sin 2u \sqrt{1+\sin^2 2u}\;du = \int_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}\sin 2u \sqrt{2-\cos^2 2u}\;du \\ &= \{\, t = \cos 2u;\; dt = -2\,\sin 2u\,du \,\} = \tfrac{1}{4}\int_{-1}^{1} \sqrt{2-t^2}\;dt \\ &= \{\, t = \sqrt{2}\,\sin\theta;\; dt = \sqrt{2}\,\cos\theta\,d\theta \,\} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{2-2\sin^2\theta}\;\cos\theta\,d\theta \\ &= \tfrac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} |\cos\theta|\,\cos\theta\,d\theta = \tfrac{1}{4}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1+\cos 2\theta)\,d\theta \\ &= \tfrac{1}{4}\Big[\theta + \tfrac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \tfrac{1}{4}\big(\tfrac{\pi}{4} + \tfrac{1}{2} - (-\tfrac{\pi}{4} - \tfrac{1}{2})\big) = \tfrac{1}{8}\pi + \tfrac{1}{4}. \end{aligned}$$

15.3.6 Beräkna

$$\int_C e^z\,ds$$

där C är kurvan

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = e^t \cos t\,\boldsymbol{e}_x + e^t \sin t\,\boldsymbol{e}_y + t\,\boldsymbol{e}_z \qquad (0 \le t \le 2\pi).$$

I vektorform skrivs kurvan

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t\cos t \\ e^t \sin t \\ t \end{pmatrix} \qquad (0 \le t \le 2\pi),$$

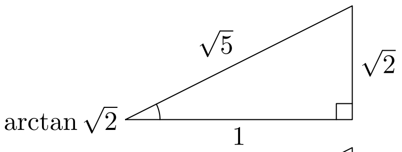
och båglängdselementet är

$$\begin{aligned} ds &= |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt = \sqrt{(e^t\cos t - e^t \sin t)^2 + (e^t \sin t + e^t \cos t)^2 + 1^2}\;dt \\ &= \sqrt{e^{2t}(\cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2\cos t \sin t + \cos^2 t) + 1}\;dt \\ &= \sqrt{2e^{2t}+1}\;dt. \end{aligned}$$

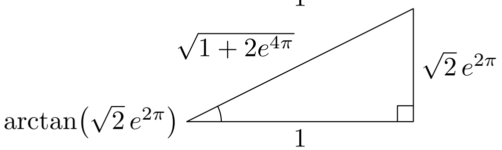
Linjeintegralen blir

$$\begin{aligned} \int_C e^z\,ds &= \int_0^{2\pi} e^t \sqrt{2e^{2t}+1}\;dt = \{\, s = \sqrt{2}\,e^t;\; ds = \sqrt{2}\,e^t\,dt \,\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}\,e^{2\pi}} \sqrt{s^2+1}\;ds = \{\, s = \tan\theta;\; ds = (1+\tan^2\theta)\,d\theta \,\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\arctan\sqrt{2}}^{\arctan(\sqrt{2}\,e^{2\pi})} \frac{d\theta}{\cos^3\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\arctan\sqrt{2}}^{\arctan(\sqrt{2}\,e^{2\pi})} \frac{\cos\theta\,d\theta}{(1-\sin^2\theta)^2} \\ &= \{\, r = \sin\theta;\; dr = \cos\theta\,d\theta \,\} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\sin\arctan\sqrt{2}}^{\sin\arctan(\sqrt{2}\,e^{2\pi})} \frac{dr}{(1-r^2)^2} \\ &= \{\, \text{partialbråkuppdelning} \,\} \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int \left(\frac{1}{(r-1)^2} - \frac{1}{r-1} + \frac{1}{(r+1)^2} + \frac{1}{r+1} \right) dr \\ &= \frac{1}{4\sqrt{2}} \left[-\frac{1}{r-1} - \log|r-1| - \frac{1}{r+1} + \log|r+1| \right]_{\sin\arctan\sqrt{2}}^{\sin\arctan(\sqrt{2}\,e^{2\pi})} \end{aligned}$$

Med två hjälptrianglar kan vi förenkla övre och undre integrationsgränsen.



$$\sin\arctan\sqrt{2} = \sqrt{\tfrac{2}{5}}$$



$$\sin\arctan(\sqrt{2}\,e^{2\pi}) = \frac{\sqrt{2}\,e^{2\pi}}{\sqrt{1+2e^{4\pi}}}$$

Linjeintegralen blir

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\dfrac{\sqrt{2}\,e^{2\pi}}{\sqrt{1+2e^{4\pi}}}-1} - \frac{1}{\dfrac{\sqrt{2}\,e^{2\pi}}{\sqrt{1+2e^{4\pi}}}+1} + \log\frac{\dfrac{\sqrt{2}\,e^{2\pi}}{\sqrt{1+2e^{4\pi}}}+1}{\dfrac{\sqrt{2}\,e^{2\pi}}{\sqrt{1+2e^{4\pi}}}-1}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{2/5}-1} + \frac{1}{\sqrt{2/5}+1} - \log\frac{\sqrt{2/5}+1}{\sqrt{2/5}-1}\right).$$

Anm. Med en hyperbolisk substitution blir räkningarna något enklare

$$\begin{aligned}\int \sqrt{s^2+1}\,ds &= \{\, s=\sinh t;\ ds=\cosh t\,\} = \int \cosh^2 t\,dt\\ &= \tfrac{1}{2}\int \bigl(1+\cosh 2t\bigr)\,dt = \tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{4}\sinh 2t + C\end{aligned}$$

men integrationsgränserna är fortfarande risiga.

15.3.7 Bestäm

$$\int_C x^2\,ds$$

längs skärningslinjen mellan planen $x-y+z=0$ och $x+y+2z=0$, från origo till $(3,1,-2)$.

Skärningslinjen är lösningarna till de båda planens ekvationer

$$\begin{aligned} x-y+z&=0,\\ x+y+2z&=0.\end{aligned}$$

Med gausseliminering får vi lösningarna till

$$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t\\ t\\ -2t\end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}),$$

som också är en parametrisering av skärningslinjen. Origo svarar mot $t=0$ och $(3,1,-2)$ svarar mot $t=1$. Båglängdselementet är

$$ds = |\dot{\boldsymbol{r}}(t)|\,dt = \sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}\,dt = \sqrt{14}\,dt.$$

Linjeintegralen är alltså

$$\int_C x^2\,ds = \int_0^1 (3t)^2\sqrt{14}\,dt = 9\sqrt{14}\int_0^1 t^2\,dt = 3\sqrt{14}.$$

Anm. Eftersom skärningskurvan mellan två plan alltid är en rät linje, som dessutom måste gå genom origo och $(3,1,-2)$ kunde vi direkt ha skrivit upp linjens parametrisering.

15.4.2 Beräkna linjeintegralen av vektorfältet

$$\boldsymbol{F}(x,y) = \cos x\, \boldsymbol{e}_x - y\, \boldsymbol{e}_y$$

längs kurvan $y = \sin x$ från $(0,0)$ till $(\pi, 0)$.

Vi ska lösa uppgiften med tre metoder.

Metod 1 (explicit uträkning)

Vi skriver kurvan i parameterform

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix} \qquad (0 \le t \le \pi),$$

och har då

$$d\boldsymbol{r}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt = \begin{pmatrix} 1 \\ \cos t \end{pmatrix} dt.$$

Linjeintegralen blir

$$\begin{aligned} \int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} &= \int_C (\cos x, -y) \cdot (dx, dy) = \int_0^\pi (\cos t, -\sin t) \cdot (dt, \cos t\, dt) \\ &= \int_0^\pi \cos t\, dt - \sin t\, \cos t\, dt = \Big[\sin t \Big]_0^\pi - \Big[\tfrac{1}{2} \sin^2 t \Big]_0^\pi = 0. \end{aligned}$$

Metod 2 (potential)

Vi har

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin x & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

som är symmetrisk i hela planet. Vektorfältet $\boldsymbol{F}$ är därmed konservativ och har en potential Φ som uppfyller

$$\begin{aligned} \nabla\Phi &= \Big(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = (\cos x, -y) \\ \Leftrightarrow \qquad \Phi &= \sin x - \tfrac{1}{2} y^2 + C. \end{aligned}$$

Linjeintegralen är oberoende av väg och vi har

$$\int_{(0,0)}^{(\pi,0)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \Phi(\pi, 0) - \Phi(0,0) = 0.$$

Metod 3 (byte av integrationskurva)

Precis som i metod 2 visar vi först att $\boldsymbol{F}$ är konservativ.

Eftersom $\boldsymbol{F}$ är konservativ är linjeintegralens värde oberoende av vilken kurva från $(0,0)$ till $(\pi,0)$ som används. Vi byter därför ut kurvan i uppgiftstexten mot den enklare kurvan

$$\boldsymbol{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (0 \le t \le \pi).$$

Linjeintegralen blir

$$\int_0^\pi (\cos t, 0) \cdot (dt, 0) = \int_0^\pi \cos t\, dt = \Big[\sin t \Big]_0^\pi = 0.$$

15.4.4 Beräkna linjeintegralen av vektorfältet

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = z\, \boldsymbol{e}_x - y\, \boldsymbol{e}_y + 2x\, \boldsymbol{e}_z$$

längs kurvan $x = t$, $y = t^2$ och $z = t^3$ från $(0,0,0)$ till $(1,1,1)$.

Vi undersöker först om vektorfältet är konservativt. Vi har

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Eftersom matrisen inte är symmetrisk är $\boldsymbol{F}$ inte konservativ. Vi bestämmer därför linjeintegralens värde med en explicit uträkning. Vi har

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) &= \begin{pmatrix} z(t) \\ -y(t) \\ 2x(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 \\ -t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \\ d\boldsymbol{r}(t) &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt. \end{aligned}$$

Kurvan genomlöps av denna parametrisering när t går från 0 till 1. Linjeintegralen blir

$$\begin{aligned}\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^1 \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big)\cdot d\boldsymbol{r}(t) = \int_0^1 (t^3,-t^2,2t)\cdot(1,2t,3t^2)\,dt \\ &= \int_0^1 (t^3-2t^3+6t^3)\,dt = \Big[\,\tfrac{5}{4}t^4\,\Big]_0^1 = \tfrac{5}{4}.\end{aligned}$$

15.4.8 Bestäm

$$\oint_C x^2y^2\,dx + x^3y\,dy$$

moturs runt kvadraten med hörn i $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ och $(0,1)$.

Vi undersöker om vektorfältet

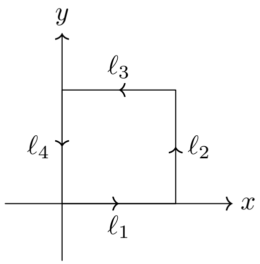
$$\boldsymbol{F}(x,y) = (x^2y^2, x^3y)$$

är konservativt. Eftersom

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} * & 3x^2y \\ 2x^2y & * \end{pmatrix} \qquad (* = \text{ointressant})$$

inte är symmetrisk är $\boldsymbol{F}$ inte konservativ.

Kvadraten består av fyra räta randkurvor



som parametriseras av

$$\begin{aligned} &\ell_1\colon && \boldsymbol{r}_1(t) = (t,0) && (0\le t\le 1)\\ &\ell_2\colon && \boldsymbol{r}_2(t) = (1,t) && (0\le t\le 1)\\ &\ell_3\colon && \boldsymbol{r}_3(t) = (-t,1) && (0\le t\le 1)\\ &\ell_4\colon && \boldsymbol{r}_4(t) = (0,-t) && (0\le t\le 1)\end{aligned}$$

På de fyra kantlinjerna är

$$\begin{aligned} &\ell_1\colon && \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}_1(t)\big) = (t^2\cdot 0^2, t^3\cdot 0) = (0,0),\\ &\ell_2\colon && \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}_2(t)\big) = (1^2\cdot t^2, 1^3\cdot t) = (t^2,t),\\ & && d\boldsymbol{r}_2(t) = (0,dt),\\ &\ell_3\colon && \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}_3(t)\big) = ((-t)^2\cdot 1^2, (-t)^3\cdot 1) = (t^2,-t^3),\\ & && d\boldsymbol{r}_3(t) = (-dt,0),\\ &\ell_4\colon && \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}_4(t)\big) = (0^2\cdot(-t)^2, 0^3\cdot(-t)) = (0,0).\end{aligned}$$

Linjeintegralen runt kvadraten delar vi upp i fyra delar som svarar mot de fyra kantlinjerna.

$$\begin{aligned}\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \sum_{i=1}^{4}\int_{\ell_i}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \{\,\text{På } \ell_1 \text{ och } \ell_4 \text{ är } \boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}\,\}\\ &= \int_{\ell_2} + \int_{\ell_3} = \int_0^1 (t^2,t)\cdot(0,dt) + \int_0^1 (t^2,-t^3)\cdot(-dt,0)\\ &= \int_0^1 t\,dt - \int_0^1 t^2\,dt = \Big[\,\tfrac{1}{2}\,t^2\,\Big]_0^1 - \Big[\,\tfrac{1}{3}\,t^3\,\Big]_0^1 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{6}.\end{aligned}$$

15.4.10 Vektorfältet

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = (axy+z)\,\boldsymbol{e}_x + x^2\,\boldsymbol{e}_y + (bx+2z)\,\boldsymbol{e}_z$$

är konservativt. Bestäm a och b, och bestäm även en potential till $\boldsymbol{F}$.

Beräkna

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r},$$

där C är kurvan från $(1,1,0)$ till $(0,0,3)$ som ligger på skärningskurvan mellan ytorna $2x+y+z=3$ och $9x^2+9y^2+2z^2=18$ i oktanten $x,y,z\geq 0$.

Vektorfältet $\boldsymbol{F}$ är konservativt endast om

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} * & ax & 1 \\ 2x & * & 0 \\ b & 0 & * \end{pmatrix}$$

är symmetrisk. Detta ger direkt att $a=2$ och $b=1$. En potential Φ till $\boldsymbol{F}$ uppfyller

$$\begin{aligned}
\nabla\Phi = \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y},\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big) &= \boldsymbol{F}(x,y,z) = (2xy+z, x^2, x+2z) \\
\Leftrightarrow \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x} &= 2xy+z, & (1)\\
\frac{\partial\Phi}{\partial y} &= x^2, & (2)\\
\frac{\partial\Phi}{\partial z} &= x+2z. & (3)
\end{aligned}$$

Om vi integrerar upp (1), (2) och (3) fås

$$\begin{aligned}
\Phi &= x^2y + xz + C_1(y,z),\\
\Phi &= x^2y + C_2(x,z),\\
\Phi &= xz + z^2 + C_3(x,y).
\end{aligned}$$

Eftersom vänsterleden är lika måste högerleden vara lika, vilket ger

$$\Phi = x^2y + xz + z^2 + C.$$

Eftersom vektorfältet är konservativt och vi vet dess potential kan vi strunta i den komplicerade beskrivningen av kurvan C och istället få linjeintegralens värde som differensen mellan potentialens värde i kurvans två ändpunkter,

$$\int_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \Phi(0,0,3) - \Phi(1,1,0) = 3^2 - 1^2\cdot 1 = 8.$$

15.4.12 Bestäm arbetet som kraftfältet

$$\boldsymbol{F} = (y^2\cos x + z^3)\,\boldsymbol{e}_x + (2y\sin x - 4)\,\boldsymbol{e}_y + (3xz^2+2)\,\boldsymbol{e}_z$$

utför när en partikel flyttas längs kurvan $x=\arcsin t$, $y=1-2t$ och $z=3t-1$ $(0\leq t\leq 1)$.

Vi undersöker först om kraftfältet är konservativt. Jakobianen

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} * & 2y\cos x & 3z^2 \\ 2y\cos x & * & 0 \\ 3z^2 & 0 & * \end{pmatrix}$$

är symmetrisk vilket ger att $\boldsymbol{F}$ är konservativ. En potential Φ till $\boldsymbol{F}$ uppfyller

$$\begin{aligned}
\nabla\Phi = \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x},\frac{\partial\Phi}{\partial y},\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big) &= \boldsymbol{F} = (y^2\cos x + z^3, 2y\sin x - 4, 3xz^2+2) \\
\Leftrightarrow \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x} &= y^2\cos x + z^3, & (1)\\
\frac{\partial\Phi}{\partial y} &= 2y\sin x - 4, & (2)\\
\frac{\partial\Phi}{\partial z} &= 3xz^2 + 2, & (3)
\end{aligned}$$

som efter integrering ger

$$\begin{aligned}
\Phi &= y^2 \sin x + xz^3 + C_1(x,y),\\
\Phi &= y^2 \sin x - 4y + C_2(x,z),\\
\Phi &= xz^3 + 2z + C_3(x,y).
\end{aligned}$$

Alltså måste potentialen vara

$$\Phi = y^2 \sin x + xz^3 - 4y + 2z + C.$$

Kurvans ändpunkter är

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{r}(0) &= \begin{pmatrix} \arcsin 0 \\ 1-2\cdot 0 \\ 3\cdot 0 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\\
\boldsymbol{r}(1) &= \begin{pmatrix} \arcsin 1 \\ 1-2\cdot 1 \\ 3\cdot 1 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Arbetet som utförs är

$$\begin{aligned}
W &= \int \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \Phi(\pi/2,-1,2) - \Phi(0,1,-1)\\
&= (-1)^2 \sin\tfrac{\pi}{2} + \tfrac{\pi}{2}\,2^3 - 4(-1) + 2\cdot 2\\
&\quad - \big(1^2\cdot \sin 0 + 0\cdot(-1)^3 - 4\cdot 1 + 2\cdot(-1)\big)\\
&= 1 + 4\pi + 4 + 4 + 4 + 2 = 4\pi + 15.
\end{aligned}$$

15.4.16 Beräkna de slutna linjeintegralerna

a) $\oint_C x\,dy$

b) $\oint_C y\,dx$

runt ellipsen $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ moturs.

a) Från integranden kan vi avläsa vektorfältet $\boldsymbol{F}$,

$$x\,dy = (0,x)\cdot(dx,dy) = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{F}(x,y) = (0,x).$$

Eftersom Jakobianen

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

inte är symmetrisk är $\boldsymbol{F}$ inte konservativ.

Ellipsen har standardparametriseringen

$$\begin{aligned} x &= a\,\cos t \\ y &= b\,\sin t \end{aligned} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

som genomlöper ellipsen moturs när t går från 0 till 2π. Med denna parametrisering har vi att

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) &= (0, a\cos t)\\
d\boldsymbol{r}(t) &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt = (-a\,\sin t, b\,\cos t)\,dt
\end{aligned}$$

och linjeintegralen blir

$$\begin{aligned}
\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \int_0^{2\pi} (0, a\cos t)\cdot(-a\sin t, b\cos t)\,dt\\
&= \int_0^{2\pi} ab\,\cos^2 t\,dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos 2t)\,dt\\
&= \frac{ab}{2}\Big[\,t + \tfrac{1}{2}\sin 2t\,\Big]_0^{2\pi} = \pi ab.
\end{aligned}$$

b) I detta fall är vektorfältet

$$\boldsymbol{F} = (y, 0)$$

som inte heller är konservativt eftersom Jakobianen

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

inte är symmetrisk. Om vi däremot betraktar vektorfältet

$$\boldsymbol{G}(x,y) \cdot d\boldsymbol{r} = x\,dy + y\,dx$$

så är $\boldsymbol{G}$ konservativ eftersom

$$\frac{\partial \boldsymbol{G}}{\partial(x,y)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

är symmetrisk. Alltså har vi att

$$\oint_C x\,dy + y\,dx = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \oint_C y\,dx = -\oint_C x\,dy = -\pi\,ab.$$

15.4.22 Beräkna

$$\frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2}$$

a) moturs runt cirkeln $x^2+y^2=a^2$,

b) medurs runt kvadraten med hörnpunkter $(-1,-1)$, $(-1,1)$, $(1,1)$ och $(1,-1)$, och

c) moturs runt randen till området $1 \le x^2+y^2 \le 2$ och $y \ge 0$.

a) Vektorfältet $\boldsymbol{F}$ i integranden får vi till

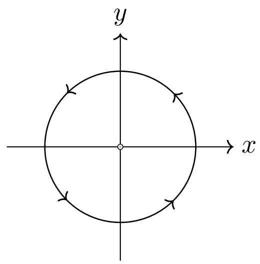
$$\begin{aligned} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} &= \Bigl(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\Bigr) \cdot (dx, dy) = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \\ \Leftrightarrow \qquad \boldsymbol{F}(x,y) &= \Bigl(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\Bigr). \end{aligned}$$

Jakobianen till $\boldsymbol{F}$ är symmetrisk

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x,y)} = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} * & -x^2+y^2 \\ -x^2+y^2 & * \end{pmatrix},$$

vilket betyder att $\boldsymbol{F}$ är konservativ där den är definierad, vilket i detta fall är hela planet minus origo.

Eftersom cirkeln löper runt origo kan vi *inte* dra slutsatsen att den slutna linjeintegralen är noll.



Vi parametriserar cirkeln

$$\begin{aligned} x &= \cos t \\ y &= \sin t \end{aligned} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

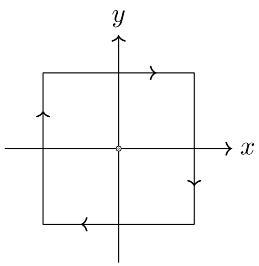
och får då att

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F}\bigl(\boldsymbol{r}(t)\bigr) &= \Bigl(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}\Bigr) = (-\sin t, \cos t), \\ d\boldsymbol{r}(t) &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\,dt = (-\sin t, \cos t)\,dt. \end{aligned}$$

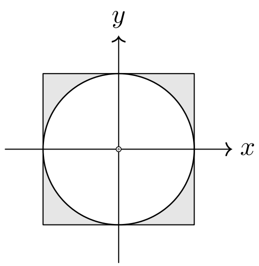
Linjeintegralen blir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} dt = 1. \end{aligned}$$

b) Vi ritar upp kvadraten.



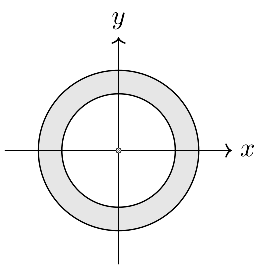
Om vi också ritar upp cirkeln från a-uppgiften

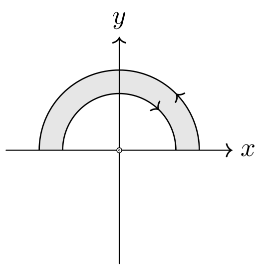


så ser vi att i området mellan kurvorna är vektorfältet konservativt, vilket betyder att linjeintegralerna runt kvadraten och cirkeln har samma värde om det nu inte vore för att de har olika omloppsriktningar vilket ger dem olika tecken. Alltså är

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -1.$$

c) Olikheten $1 \le x^2 + y^2 \le 2$ definierar området mellan de två koncentriska cirklarna $x^2 + y^2 = 1$ och $x^2 + y^2 = 2$. Olikheten $y \ge 0$ betyder att området är halvcirkelringen i övre halvplanet.





Eftersom origo inte tillhör området innanför den slutna kurvan är $\boldsymbol{F}$ konservativ där, och linjeintegralen är

$$\int \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0.$$