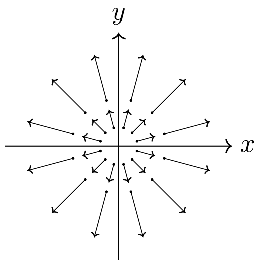
Lektion 13, Flervariabelanalys den 15 februari 2000

15.1.2 Skissera vektorfältet

$$\boldsymbol{F}(x,y) = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y$$

och bestäm dess fältlinjer.

I varje punkt (x,y) har vektorfältet en vektor med komponenter (x,y), d.v.s. vektorn utgående från punkten är lika med punktens ortsvektor.



En kurva $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ är en fältlinje till vektorfältet om

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) \quad \text{är parallell med} \quad \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big).$$

Detta villkor kan vi t.ex. formulera som

$$\begin{vmatrix} \text{---}\ \dot{\boldsymbol{r}}(t)\ \text{---} \\ -\ \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big)\ - \end{vmatrix} = 0,$$

där

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{r}}(t) &= \big(\dot{x}(t), \dot{y}(t)\big), \\ \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) &= \big(x(t), y(t)\big). \end{aligned}$$

Determinantvillkoret blir alltså

$$\begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ x(t) & y(t) \end{vmatrix} = \dot{x}y - x\dot{y} = 0. \qquad (\dagger)$$

Om vi antar att $x, y \neq 0$ då kan $(\dagger)$ skrivas

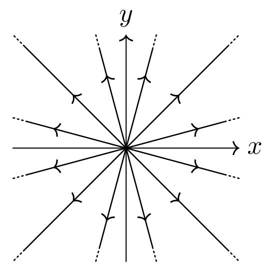
$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{y}}{y}.$$

Integration m.a.p. t av båda led ger

$$\begin{aligned} \text{VL} &= \int_0^t \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}\,dt = \Big[\log|x(t)|\Big]_0^t = \log|x(t)| - \log|x(0)| = \log\left|\frac{x(t)}{x(0)}\right| \\ \text{HL} &= \int_0^t \frac{\dot{y}(t)}{y(t)}\,dt = \Big[\log|y(t)|\Big]_0^t = \log|y(t)| - \log|y(0)| = \log\left|\frac{y(t)}{y(0)}\right| \\ &\Leftrightarrow \quad y(t) = \pm\frac{y(0)}{x(0)}\,x(t). \end{aligned}$$

Minustecknet kan förkastas eftersom $y(0) = +y(0)$ ($\neq 0$).

Fältlinjerna är alltså räta linjer som går genom origo.



Om $x = 0$ eller $y = 0$ ger $(\dagger)$ att $\dot{x} = 0$ respektive $\dot{y} = 0$, vilket ger fältlinjer längs y-axeln respektive x-axeln.

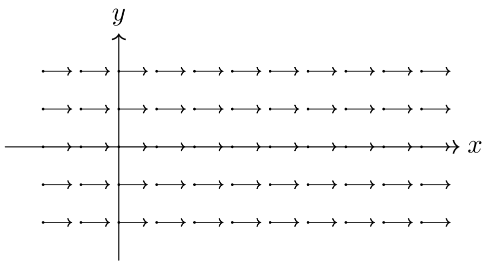
Om $x = 0$ och $y = 0$ befinner vi oss i en singulär punkt där vektorfältet har en nollvektor.

15.1.4 Skissera vektorfältet

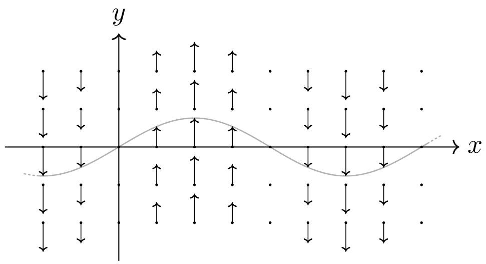
$$\boldsymbol{F}(x,y) = \boldsymbol{e}_x + \sin x\, \boldsymbol{e}_y$$

och bestäm dess fältlinjer.

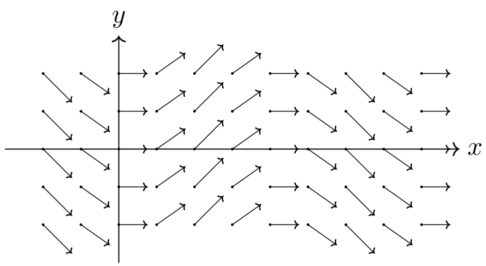
I varje punkt har vektorfältet x-komponenten 1.



Vektorfältets y-komponent har beroendet $\sin x$.



Sammanlagt har vektorfältet utseendet



En kurva $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ är en fältlinje om

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) \quad \text{är parallell med} \quad \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big),$$

d.v.s. om

$$\begin{vmatrix} \text{---}\,\dot{\boldsymbol{r}}(t)\,\text{---} \\ -\,\boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big)\,- \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \\ 1 & \sin x(t) \end{vmatrix} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{y} = \dot{x}\,\sin x.$$

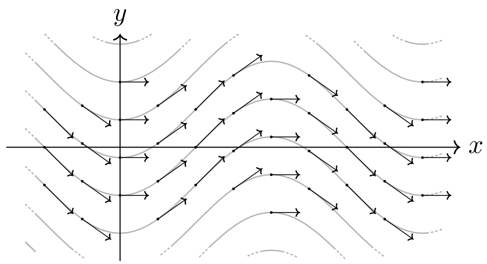
Vi integrerar båda led

$$\text{VL} = \int_0^t \dot{y}(t)\,dt = y(t) - y(0),$$

$$\text{HL} = \int_0^t \dot{x}(t)\sin x(t)\,dt = \Big[-\cos x(t)\Big]_0^t = -\cos x(t) + \cos x(0).$$

Alltså är fältlinjerna i formen

$$y = -\cos x + C.$$



15.1.10 Beskriv fältlinjerna till hastighetsfältet

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y - x\boldsymbol{e}_z.$$

En kurva $\boldsymbol{r}(t) = \big(x(t), y(t), z(t)\big)$ är en fältlinje om

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) \quad \text{är parallell med} \quad \boldsymbol{v}\big(\boldsymbol{r}(t)\big).$$

Detta villkor kan formuleras som

$$\begin{aligned}
&\dot{\boldsymbol{r}}(t) = \lambda(t)\, \boldsymbol{v}\big(\boldsymbol{r}(t)\big) \\
\Leftrightarrow\quad &\dot{x}(t) = \lambda(t)\, x(t) && (1)\\
&\dot{y}(t) = \lambda(t)\, y(t) && (2)\\
&\dot{z}(t) = \lambda(t)\, z(t) && (3)
\end{aligned}$$

för någon skalärfunktion $\lambda(t)$. (1) och (3) ger att

$$\dot{z}(t) = -\lambda(t)\, x(t) = -\dot{x}(t)$$

som efter integrering ger

$$\begin{aligned}
\text{VL} &= \int_0^t \dot{z}(t)\, dt = z(t) - z(0), \\
\text{HL} &= \int_0^t -\dot{x}(t)\, dt = -x(t) + x(0), \\
\Leftrightarrow\quad & z(t) = -x(t) + x(0) + z(0).
\end{aligned}$$

Ekvation (1) och (2) kan skrivas om till

$$\frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \frac{\dot{y}(t)}{y(t)}.$$

Integrering av båda led ger

$$\begin{aligned}
\text{VL} &= \int_0^t \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}\, dt = \Big[\log|x(t)|\Big]_0^t = \log\left|\frac{x(t)}{x(0)}\right| \\
\text{HL} &= \int_0^t \frac{\dot{y}(t)}{y(t)}\, dt = \Big[\log|y(t)|\Big]_0^t = \log\left|\frac{y(t)}{y(0)}\right| \\
\Leftrightarrow\quad & y(t) = \pm\frac{y(0)}{x(0)}\, x(t).
\end{aligned}$$

Stoppar vi in $t = 0$ i formeln för $y(t)$ fås $y(0) = \pm y(0)$ och därför måste minustecknet förkastas. Alltså ges fältlinjerna av kurvskaran

$$\begin{aligned}
y &= C_1\, x, \\
z &= -x + C_2.
\end{aligned}$$

15.2.2 Undersök om vektorfältet

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = y\boldsymbol{e}_x + x\boldsymbol{e}_y + z^2\boldsymbol{e}_z$$

är konservativt, och bestäm i sådant fall potentialen.

Vektorfältet $\boldsymbol{F}$ är konservativt om det finns en potential Φ s.a.

$$\nabla\Phi = \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big) = \boldsymbol{F}(x, y, z) = (y, x, z^2). \qquad (*)$$

Ett nödvändigt villkor för att en potential Φ ska existera är att vektorfältet $\boldsymbol{F}$ har en symmetrisk Jakobian. Vi har

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial(x, y, z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

som är symmetrisk. Vektorfältet kan alltså möjligtvis vara konservativt.

Integrerar vi upp $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial y$ och $\partial\Phi/\partial z$ i $(*)$ fås

$$\begin{aligned}
\Phi &= xy + C_1(y, z), \\
\Phi &= xy + C_2(x, z), \\
\Phi &= \tfrac{1}{3}z^3 + C_3(x, y).
\end{aligned}$$

Dessa samband tillsammans visar att

$$\Phi = xy + \tfrac{1}{3}z^3$$

är en potential till $\boldsymbol{F}$ som därmed är konservativ.

15.2.4 Undersök om vektorfältet

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2}\,\boldsymbol{e}_x + \frac{y}{x^2+y^2}\,\boldsymbol{e}_y$$

är konservativt, och bestäm i sådant fall potentialen.

Det första testet vi ska utföra är att undersöka om vektorfältets Jakobian är symmetrisk. Uttryckt i $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2)$ blir detta villkor

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

som i vårt fall blir

$$\begin{aligned} \text{VL} &= \frac{\partial}{\partial y}\Bigl(\frac{x}{x^2+y^2}\Bigr) = -\frac{x}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2y = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2},\\ \text{HL} &= \frac{\partial}{\partial x}\Bigl(\frac{y}{x^2+y^2}\Bigr) = -\frac{y}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2x = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}. \end{aligned}$$

Vektorfältet klarade alltså testet. En potential Φ till $\boldsymbol{F}$ ska uppfylla

$$\nabla\Phi = \Bigl(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}\Bigr) = \boldsymbol{F}(x,y) = \Bigl(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\Bigr)$$

och i komponentform

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{x}{x^2+y^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{y}{x^2+y^2}. \tag{2}$$

Vi integrerar upp (1) med avseende på x,

$$\begin{aligned} \Phi &= \int \frac{x}{x^2+y^2}\,dx = \{\, s = x^2+y^2;\ ds = 2x\,dx \,\}\\ &= \tfrac{1}{2}\int \frac{ds}{s} = \tfrac{1}{2}\log|s| + C(y) = \tfrac{1}{2}\log(x^2+y^2) + C(y). \end{aligned}$$

Detta insatt i (2) ger

$$\begin{aligned} \text{VL av (2)} &= \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2}}{x^2+y^2}\cdot 2y + C'(y) = \frac{y}{x^2+y^2} + C'(y)\\ \text{HL av (2)} &= \frac{y}{x^2+y^2} \end{aligned}$$

vilket ger $C'(y) = 0$, d.v.s. $C =$ konstant som vi kan välja till 0. En potential är alltså

$$\Phi(x,y,z) = \tfrac{1}{2}\log(x^2+y^2).$$

Notera att eftersom vektorfältet inte är definierat i origo är $\boldsymbol{F}$ konservativt överallt utom i origo.

15.2.6 Undersök om vektorfältet

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}(xz\boldsymbol{e}_x + yz\boldsymbol{e}_y + xy\boldsymbol{e}_z)$$

är konservativt, och bestäm i sådant fall potentialen.

Ett nödvändigt villkor för att $\boldsymbol{F}$ ska vara konservativ är att dess Jakobian

$$\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z}\\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z}\\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix}$$

är symmetrisk, d.v.s. att följande samband är uppfyllda

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}. \tag{3}$$

Vi kontrollerar,

$$\text{VL av (1)} = \frac{\partial}{\partial y}\Big(xz\, e^{x^2+y^2+z^2}\Big) = xz\, e^{x^2+y^2+z^2} 2y,$$
$$\text{HL av (1)} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(yz\, e^{x^2+y^2+z^2}\Big) = yz\, e^{x^2+y^2+z^2} 2x,$$
$$\text{VL av (2)} = \frac{\partial}{\partial z}\Big(xz\, e^{x^2+y^2+z^2}\Big) = (x+2xz^2)e^{x^2+y^2+z^2},$$
$$\text{HL av (2)} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(xy\, e^{x^2+y^2+z^2}\Big) = (y+2x^2y)e^{x^2+y^2+z^2},$$

vilket visar att $\boldsymbol{F}$ inte är konservativ.

15.2.10 Visa att vektorfältet

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = \frac{2x}{z}\,\boldsymbol{e}_x + \frac{2y}{z}\,\boldsymbol{e}_y + \Big(1 - \frac{x^2+y^2}{z^2}\Big)\,\boldsymbol{e}_z$$

är konservativt och bestäm dess potential.

Beskriv ekvipotentialytorna och bestäm fältlinjerna till $\boldsymbol{F}$.

Vektorfältet $\boldsymbol{F}$ är konservativt om det finns en potential Φ s.a.

$$\nabla\Phi = \Big(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y}, \frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big) = \boldsymbol{F},$$

d.v.s.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{2x}{z}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{2y}{z} \quad \text{och} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 1 - \frac{x^2+y^2}{z^2}. \qquad (1),(2),(3)$$

Vi integrerar upp (1) med avseende på x,

$$\Phi = \int \frac{2x}{z}\,dx = \frac{x^2}{z} + C_1(y,z).$$

Detta insatt i (2) ger

$$0 + \frac{\partial C_1}{\partial y} = \frac{2y}{z}$$

som efter integrering m.a.p. y ger

$$C_1(y,z) = \int \frac{2y}{z}\,dy = \frac{y^2}{z} + C_2(z),$$

d.v.s. $\Phi = \dfrac{x^2}{z} + \dfrac{y^2}{z} + C_2(z)$. Stoppar vi slutligen in detta i (3) fås

$$C_2'(z) - \frac{x^2}{z^2} - \frac{y^2}{z^2} = 1 - \frac{x^2+y^2}{z^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad C_2'(z) = 1$$
$$\Leftrightarrow \qquad C_2(z) = z + C_3.$$

En potential till $\boldsymbol{F}$ är alltså (C_3 vald till 0)

$$\Phi = \frac{x^2+y^2}{z} + z.$$

Ekvipotentialytorna ges av alla punkter (x,y,z) som uppfyller

$$\Phi(x,y,z) = C$$

för ett fixt C, d.v.s.

$$\frac{x^2+y^2}{z} + z = C \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2+y^2+z^2 = Cz$$
$$\Leftrightarrow \qquad x^2+y^2+(z-C/2)^2 = (C/2)^2.$$

Ekvipotentialytorna är alltså sfäriska skal med mittpunkt i $(0,0,C/2)$ och radie $C/2$.

En fältlinje $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = \big(x(t),y(t),z(t)\big)$ uppfyller villkoret

$$\dot{\boldsymbol{r}}(t) \quad \text{är parallell med} \quad \boldsymbol{F}\big(\boldsymbol{r}(t)\big)$$

som vi kan formulera som determinantvillkoret

$$\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \dfrac{2x}{z} & \dfrac{2y}{z} & 1 - \dfrac{x^2+y^2}{z^2} \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

för alla vektorer (a,b,c). Kofaktorutveckling längs tredje raden ger

$$a\begin{vmatrix} \dot y & \dot z \\ \dfrac{2y}{z} & 1-\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\end{vmatrix} - b\begin{vmatrix}\dot x & \dot z\\ \dfrac{2x}{z} & 1-\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\end{vmatrix} + c\begin{vmatrix}\dot x & \dot y\\ \dfrac{2x}{z} & \dfrac{2y}{z}\end{vmatrix} = 0.$$

Eftersom detta ska gälla för alla val av a, b och c måste de tre minorerna vara noll.

$$\begin{vmatrix} \dot y & \dot z \\ \dfrac{2y}{z} & 1-\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\end{vmatrix} = \dot y\Big(1-\frac{x^2+y^2}{z^2}\Big) - \frac{2y\dot z}{z} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \dot x & \dot z \\ \dfrac{2x}{z} & 1-\dfrac{x^2+y^2}{z^2}\end{vmatrix} = \dot x\Big(1-\frac{x^2+y^2}{z^2}\Big) - \frac{2x\dot z}{z} = 0$$

$$\begin{vmatrix}\dot x & \dot y\\ \dfrac{2x}{z} & \dfrac{2y}{z}\end{vmatrix} = \frac{2\dot x y}{z} - \frac{2x\dot y}{z} = 0,$$

som efter förenkling ger ekvationerna

$$\dot y(z^2-x^2-y^2) - 2yz\dot z = 0 \tag{1}$$

$$\dot x(z^2-x^2-y^2) - 2xz\dot z = 0 \tag{2}$$

$$\dot x y - x\dot y = 0 \tag{3}$$

Ekvation (3) ger

$$\frac{\dot x}{x} = \frac{\dot y}{y}$$

och efter integrering (se uppgift 15.1.2)

$$y(t) = \frac{y(0)}{x(0)}\,x(t) = C\,x(t).$$

Sätter vi in detta i (1) och (2) får vi

$$\dot x(z^2-x^2-C^2x^2) - 2xz\dot z = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\dot x}{2x} = \frac{z/x\cdot \dot z/x}{\big(z/x\big)^2-(1+C^2)}.$$

Notera att variabeln z förekommer endast i kombinationerna z/x och $\dot z/x$. Om vi därför prövar att införa en ny variabel $u = z/x$ får vi att

$$\dot u = \frac{\dot z x - z\dot x}{x^2} = \frac{\dot z}{x} - \frac{z}{x}\frac{\dot x}{x} = \frac{\dot z}{x} - u\frac{\dot x}{x} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\dot z}{x} = \dot u + u\frac{\dot x}{x}$$

och ekvationen blir

$$\frac12\frac{\dot x}{x} = \frac{u\Big(\dot u + u\dfrac{\dot x}{x}\Big)}{u^2-(1+C^2)} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\dot x}{x} = \frac{\dfrac{u\dot u}{u^2-(1+C^2)}}{\dfrac12 - \dfrac{u^2}{u^2-(1+C^2)}} = -\frac{2u\dot u}{u^2+(1+C^2)}.$$

Vi integrerar båda led m.a.p. t,

$$\begin{aligned}
\text{VL} &= \int_0^t \frac{\dot x}{x}\,dt = \Big[\log|x(t)|\Big]_0^t = \log\Big|\frac{x(t)}{x(0)}\Big|\\
\text{HL} &= -\int_0^t \frac{2u\dot u\,dt}{u^2+(1+C^2)} = \{\, s = u^2+(1+C^2);\ ds = 2u\dot u\,dt\,\}\\
&= -\int \frac{ds}{s} = -\log\Big|\frac{s(t)}{s(0)}\Big| = -\log\Big|\frac{u^2+(1+C^2)}{D_1}\Big|\\
&= -\log\Big|\frac{z^2/x^2+(1+C^2)}{D_1}\Big|\\
\Leftrightarrow&\quad \frac{x}{x(0)} = \frac{D_1x^2}{z^2+(1+C^2)x^2} \quad\Leftrightarrow\quad 1 = \frac{D_2x}{z^2+(1+C^2)x^2}\\
\Leftrightarrow&\quad z^2+(1+C^2)x^2 = D_2x\\
\Leftrightarrow&\quad z^2+(1+C^2)\Big(x-\frac{D_2}{2(1+C^2)}\Big)^2 = \frac{D_2^2}{4(1+C^2)}\\
\Leftrightarrow&\quad z^2+\Big(\frac{x-D_3}{D_3}\Big)^2 = 1.
\end{aligned}$$

Fältlinjerna kan alltså skrivas i formen

$$y = Cx,$$
$$z^2+\Big(\frac{x-D_3}{D_3}\Big)^2 = 1,$$

d.v.s. fältlinjerna blir räta linjer när de projiceras på x,y-planet och ellipser när de projiceras på x,z-planet.