Matematiska Institutionen
KTH

Lösningar till läxtal till den 17 september 2008 till kursen Diskret Matematik SF1610 för CINTE.

1. Visa med induktion att

$$\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1 \qquad \text{för} \qquad n \geq 1.$$

Lösning: (i) $VL_1 = 1 \cdot 2^{1-1} = 1$ och $HL_1 = (1-1)2^1 + 1 = 1$.

(ii) Visar nedan att $\quad VL_n = HL_n \quad \Rightarrow \quad VL_{n+1} = HL_{n+1} \quad$ för $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Om $\quad VL_n = HL_n \quad$ så gäller

$$VL_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} k2^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} + (n+1)2^n = VL_n + (n+1)2^n = HL_n + (n+1)2^n =$$

$$= (n-1)2^n + 1 + (n+1)2^n = 2^n((n-1) + (n+1)) + 1 = 2^n 2n + 1 = n2^{n+1} + 1 = HL_{n+1}.$$

(iii) Enligt induktionsprincipen gäller nu att $VL_n = HL_n$ för alla naturliga tal $n \geq 1$.

2. Visa med induktion att $7^n - 1$ är delbart med 6 för alla $n \geq 1$.

Lösning: (i) Påståendet sant för $n = 1$ ty $7^1 - 1 = 6$ som ju är delbart med 6.

(ii) Visar nedan att om $7^n - 1$ är delbart med 6 så kommer $7^{n+1} - 1$ att vara delbart med 6.

Om $7^n - 1$ är delbart med 6, dvs $7^n - 1 = 6k$, så gäller att

$$7^{n+1} - 1 = 7 \cdot 7^n - 1 = 7(6k+1) - 1 = 42k + 6 = 6(7k+1),$$

dvs

$$7^{n+1} - 1 = 6k' \qquad \text{där} \qquad k' = 7k + 1.$$

dvs 6 är en delare till $7^{n+1} - 1$.

(iii) Enligt induktionsprincipen gäller nu att 6 delar $7^n - 1$ för alla naturliga tal $n \geq 1$.

3. Låt talföljden $a_1, a_2, a_3, \ldots$ definieras av att $a_1 = 1$ och att för $n \geq 1$ så gäller att $a_{n+1} = a_n + 3$. Visa med hjälp av induktion att då är $a_n = 3n - 2$ för alla $n \geq 1$.

Lösning: (i) Påståendet är sant för $n = 1$ ty $3 \cdot 1 - 2 = 1 = a_1$.

(ii) Visar nedan att om $\quad a_n = 3n - 2 \quad$ så kommer $\quad a_{n+1} = 3(n+1) - 2 \quad$ eller ekvivalent att $\quad a_{n+1} = 3n + 1$.

Om $a_n = 3n-2$ så ger den givna rekursionsformeln $a_{n+1} = a_n + 3$ för talföljden att

$$a_{n+1} = a_n + 3 = 3n - 2 + 3 = 3n + 1,$$

dvs

$$a_{n+1} = 3n + 1 \quad (\ = 3(n+1) - 2 \ ).$$

(iii) Enligt induktionsprincipen gäller nu att $a_n = 3n - 2$ för alla naturliga tal $n \geq 1$.

4. Visa med hjälp av ett induktionsbevis att

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \frac{n}{2} \qquad \text{för} \qquad n \geq 5.$$

Lösning: (i) Olikheten gäller när $n = 5$ ty

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{60+30+20+15+12}{60} = \frac{137}{60}$$

medans

$$\frac{5}{2} = \frac{150}{60} > \frac{137}{60}.$$

(ii) Visar nedan att implikationen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \frac{n}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} < \frac{n+1}{2},$$

eller ekvivalent att implikationen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \frac{n}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{n+1}{2} < 0,$$

gäller för alla naturliga tal $n \geq 5$. (*Det är i många fall tekniskt lättare att visa att något är negativt än att vias att något är minder än något annat, mer precist: istället för att visa $A < B$ visar man att $A - B < 0$, alternativt $B - A > 0$.*)

Om $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \frac{n}{2}$ så gäller att

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{n+1}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - \frac{n+1}{2} < \frac{n}{2} + \frac{1}{n+1} - \frac{n+1}{2} =$$

$$= \frac{n(n+1) + 2 - (n+1)(n+1)}{2} = \frac{1-n}{2}.$$

Då $n > 1$ så gäller att $\frac{1-n}{2} < 0$ och alltså, enligt räkningarna ovan, att

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \frac{n+1}{2} < 0, \qquad \text{eller ekvivalent att} \qquad \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} < \frac{n+1}{2}$$

vilket vi skulle visa.

(iii) Enligt induktionsprincipen gäller nu att $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} < \frac{n}{2}$ för alla naturliga tal $n \geq 5$.