

Matematiska Institutionen
KTH

Några övningar på allmänna vektorrum inför lappskrivning nummer 3 på kursen Linjär algebra, ht 07.

OBS Några av uppgifterna nedan är kanske svårare än den uppgift som kommer på lappskrivningen.

1. Undersök om det finns några värden på talet a för vilka de fyra vektorerna $(1, 2, 1, 3)$, $(1, 0, -1, 2)$, $(1, 1, 1, 1)$ och $(2, a, a, 2a)$ blir linjärt oberoende i R^4 .

2. Undersök om vektorn $(1, 2, 1, 2)$ tillhör

$$\text{span}\{(1, 2, 3, 4), (1, 0, 1, -1), (2, 1, 1, 0)\}.$$

3. Bestäm dimension och ange en bas för det minsta delrum till R^5 som innehåller vektorerna $(1, 2, 1, 2, 1)$, $(3, 2, 1, 1, 3)$, $(-1, -1, 2, 1, 1)$ och $(3, 3, 4, 4, 5)$.

4. Visa att de vektorer (x_1, x_2, x_3, x_4) i R^4 som satisfierar ekvationen

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0$$

bildar ett delrum L_1 till R^4 . Bestäm en bas för detta delrum och ange dess dimension.

5. Låt L_2 vara det delrum till R^4 som består av de vektorer (x_1, x_2, x_3, x_4) sådana att

$$x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

Låt L_1 vara som i föregående uppgift. Då gäller att de vektorer som tillhör både L_1 och L_2 bildar ett delrum till R^4 . Bestäm dimension och en bas för detta delrum.

6. Bestäm baser för kolonrummet, radrummet och nollrummet till nedanstående matris:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ange också matrisens rang.

7. Visa att vektorerna $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 1, -1, -1)$, $(1, -1, 1, -1)$ och $(1, -1, -1, 1)$ bildar en bas för R^4 och bestäm sedan koordinaterna för vektorn $(1, 2, 3, 4)$ i denna bas.

8. Visa att de tre vektorerna $\bar{e}_1 = (1, 2, -2, 1)$, $\bar{e}_2 = (2, 1, 3, 1)$ och $\bar{e}_3 = (1, 3, 4, 1)$ är linjärt oberoende i R^5 och komplettera sedan med en vektor \bar{e}_4 så att $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ och \bar{e}_4 bildar en bas för R^4 .

9. Bestäm snittet mellan de bägge linjära hölkena V_1 och V_2 nedan, dvs bestäm samtliga vektorer som tillhör både V_1 och V_2 :

$$\begin{aligned} V_1 &= \text{span}\{(1, 2, 3, 2, 1), (2, 1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, 1, 1)\}, \\ V_2 &= \text{span}\{(2, 1, 3, 1, 1), (0, 2, 3, 1, 2), (1, 1, 1, 1, 0)\} \end{aligned}.$$

10. Visa att funktionerna $f(t) = 1 + t + t^2$, $g(t) = \sin(t)$ och $h(t) = e^t$ är linjärt oberoende i rummet av all funktioner som är kontinuerliga på intervallet $(-\infty, \infty)$.

11. Komplettera polynomen $1 - t^2$, $2t - t^3$, $1 + t + t^2 + t^3$ med ett polynom så att en bas för rummet av polynom av grad högst tre erhålles.

Lösningar kommer på kurshemsidan senast några dagar före lappskrivningen.