

Extra uppgifter inför kontrollskrivning 1

1. Bestäm, samtliga lösningar till ekationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 4 \\ x + 2y + 5z = 0 \\ x + 3y - z = 6 \end{cases}$$

2. Bestäm, samtliga lösningar till ekationssystemet

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 8 \\ -x + 5y + z = 10 \\ x - 18y + z = -38 \end{cases}$$

3. För vilka värden på talen a och b saknar systemet

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z + u = 8 \\ -x + 5y + z + 2u = 10 \\ x - 18y + z + au = b \end{cases}$$

lösningar.

4. Låt $A, B \in M_{n,n}(\mathbf{R})$. Är det sant eller falskt att

$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$$

5. Låt $A, B, C \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ vara matriser sådana att $AB = BC$. Visa att $A^n B = BC^n$.
6. En matris $A \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ kallas idempotent om $A^2 = A$. Visa att om A är idempotent så är A^T och $I_n - A$ också idempotenta.
7. Låt $A \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ vara en matris sådan att $A^k = 0$ för något positivt heltal $k > 0$. Visa att $I_n + A$ är inverterbar.
8. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Beräkna:

$$(A^2)^{-1}, (2A)^{-1}, (2A^{-1})^T, (B^T A^{-1} B)^T \text{ och } (B^T A^{-1} B)^{-1}.$$