ges minstakvadratlösningen av

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (A^TA)^{-1}A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 9 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{19}\begin{pmatrix} 10 & -9 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix}.$$

4. Låt A vara som ovan. Den ortogonala projektionen ges då av

$$A(A^TA)^{-1}A^T \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 13 \\ 13 \end{pmatrix} = \frac{1}{19}\begin{pmatrix} 26 \\ 39 \\ 39 \\ 52 \end{pmatrix}$$

Svar: $\frac{1}{19}(26, 39, 39, 52)$.

Kontroll: Vektorn $(1, 2, 2, 3) - \frac{1}{19}(26, 39, 39, 52) = \frac{1}{19}(-7, -1, -1, 5)$ skall vara vinkelrät mot $(1, 2, 1, 2)$ och $(1, 1, 2, 2)$, vilket den ju är.

5. Låt

$$Q^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & a & a \\ 3/\sqrt{14} & -1/\sqrt{14} & b \\ -1/\sqrt{42} & c & -4/\sqrt{42} \end{pmatrix}$$

Raderna respektive kolonnerna bildar ON-baser för R^3. Vi använder först att raderna har längd 1. Detta ger

$$1 = \| \text{ rad } 1 \|^2 = \frac{1}{3} + a^2 + a^2.$$
$$1 = \| \text{ rad } 2 \|^2 = \frac{9}{14} + \frac{1}{14} + b^2.$$
$$1 = \| \text{ rad } 3 \|^2 = \frac{1}{42} + c^2 + \frac{16}{42}.$$

Dessa ekvationer ger att a antingen är $1/\sqrt{3}$ eller $-1/\sqrt{3}$, b antingen $2/\sqrt{14}$ eller $-2/\sqrt{14}$ samt c antingen $5/\sqrt{42}$ eller $-5/\sqrt{42}$.

Vi prövar oss nu fram:

Fall 1: $a = -1/\sqrt{3}$. Då ger villkoret att rad 1 är ortogonal mot rad 2 att

$$0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} + \frac{-1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{14}} + \frac{-1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b'}{\sqrt{14}}.$$

Detta ger $b' = 4$ vilket ju strider mot att b antingen är $2/\sqrt{14}$ eller $-2/\sqrt{14}$. Detta fall är således uteslutet.

Fall 2: $a = 1/\sqrt{3}$. Då rad 1 ortogonal mot både rad 2 och rad 3 måste

$$0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{\sqrt{14}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{14}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{b'}{\sqrt{14}},$$

$$0 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{42}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{c'}{\sqrt{42}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{-4}{\sqrt{42}},$$

som ger $b' = -2$ och $c' = 5$.

Med $a = 1/\sqrt{3}$, $b = -2\sqrt{14}$ och $c = 5\sqrt{42}$ kommer raderna i matrisen ha längd 1 och rad 1 vara ortogonal mot rad 2 och rad 3. Man ser också att med dessa värden på b och c så blir även rad 3 och rad 2 ortogonala. Raderna bildar alltså en ON-bas. Matrisen är en ortogonal matris Q^T eftersom det då gäller att $Q^TQ = I$.

6. Låt ${}_{\mathbf{f}}\mathbf{T}_{\mathbf{e}}$ beteckna transitionsmatrisen för byte från standardbassytemet till bassystemet $\mathbf{f}$. Då gäller att

$$
{}_{\mathbf{f}}\mathbf{T}_{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad {}_{\mathbf{f}}\mathbf{T}_{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\quad {}_{\mathbf{f}}\mathbf{T}_{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}
$$

som vi kan sammanfatta i matrislikheten

$$
{}_{\mathbf{f}}\mathbf{T}_{\mathbf{e}}\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}.
$$

De sökta basvektorerna är kolonner i matrisen ${}_{\mathbf{e}}\mathbf{T}_{\mathbf{f}}$. Då ${}_{\mathbf{e}}\mathbf{T}_{\mathbf{f}} ={}_{\mathbf{f}} \mathbf{T}_{\mathbf{e}}^{-1}$ får vi

$$
{}_{\mathbf{e}}\mathbf{T}_{\mathbf{f}}=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\2&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.
$$

Svar: $\bar{f}_1=(-1,1,1)$, $\bar{f}_2=(0,1,0)$ och $\bar{f}_3=(2,0,0)$.

7. Lösningsrummet består av de (x_1,x_2,x_3,x_4) sådana att

$$
(x_1,x_2,x_3,x_4)\perp(1,1,-1,1)\quad\text{och}\quad(x_1,x_2,x_3,x_4)\perp(1,2,1,-7).
$$

Vektorerna $(1,1,-1,1)$ och $(1,2,1,-7)$ är då ortogonala mot all vektorer i lösningsrummet. Dessa vektorer spänner alltså upp ortogonala komplementet till lösningsrummet.

Svar: $span\{(1,1,-1,1),(1,2,1,-7)\}$.

8. Låt P_2 vara rummet av polynom av grad högst två och med den inre produkten

$$
<p(t),q(t)>=\int_0^1 p(t)q(t)dt.
$$

Bestäm en ortogonal bas i P_2.

Låt $p_1(t)=1$ och sök ett polynom av grad 1 som är ortogonalt mot $p_1(t)$. Ansats $p_2(t)=t-a$ och vi skall bestämma a så att

$$
0=<1,t-a>=\int_0^1 1\cdot(t-a)dt=[\frac{t^2}{2}-at]_0^1=\frac{1}{2}-a.
$$

Så vi låter

$$
a=\frac{1}{2}.
$$

Ett tredje polynom till ortogonalbasen får vi om vi låter

$$
p_3(t)=t^2-Proj_{span\{1,t-\frac{1}{2}\}}(t^2)=t^2-\frac{<1,t^2>}{<1,1>}1-\frac{<t-\frac{1}{2},t^2>}{<t-\frac{1}{2},t-\frac{1}{2}>}(t-\frac{1}{2}).
$$

Fyra inre produkter att beräkna:

$$
<1,1>=\int_0^1 1\cdot 1dt=1.
$$

$$
<1,t^2>=\int_0^1 1\cdot t^2dt=\frac{1}{3}.
$$

$$< t - \frac{1}{2}, t - \frac{1}{2} >= \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) \cdot (t - \frac{1}{2}) dt = [\frac{(t - \frac{1}{2})^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

$$< t - \frac{1}{2}, t^2 >= \int_0^1 (t - \frac{1}{2}) \cdot t^2 dt = \int_0^1 t^3 - \frac{t^2}{2} dt = [\frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{6}]_0^1 = \frac{1}{12}$$

Insättning i uttrycket för $p_3(t)$ ger nu polynomet

$$p_3(t) = t^2 - \frac{1}{3} - (t - \frac{1}{2}) = t^2 - t + \frac{1}{6}.$$

Svar: Till exempel $p_1(t) = 1$, $p_2(t) = t - \frac{1}{2}$ och $p_3(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}$.