KTH, Matematik

Lösningsförslag till DEL 2

1. (a) $A(2,1,0) = A(2(1,0,0)+(0,1,0)) = 2A(1,0,0)+A(0,1,0) = (3,1,3)$.

   (b) $N(A) = \{w = (x,y,z), A_e^e w = 0\}$ och består $N(A)$ av lösningarna till systemet:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$$

   Det följer att $N(A) = Span((3,1,-5)), \dim(N(A)) = 1$.

   (c) Matrisen till A med avseende till den standarda basen, $e = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ är:

$$[A]_e^e = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(A) = \{v = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \text{ sådan att } v = A_e^e w, \text{ för någon } w \in \mathbf{R}^3\} = \{v \in C(A)\}$$

   Eftersom är $\det([A]_e^e) = -1+2+4+1-4-2 = 0$ så är kolunnvektorerna linjärt beroende, d.v.s $\dim(C(A) < 3$. Det följer att $C(A) = Span((1,2,1),(2,-1,2)), \dim(R(A)) = 2$.

   (d) $A(f_1)_e = A_e^e(f_1) = (4,2,4)_e = \frac{7}{2}f_1 - \frac{1}{2}f_2 + f_3 = (\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}, 1)_f = A(f_1)_f$.
   $A(f_2)_e = A_e^e(f_2) = (2,0,2)_e = \frac{3}{2}f_1 - \frac{1}{2}f_2 + f_3 = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 1)_f = A(f_2)_f$.
   $A(f_3)_e = A_e^e(f_3) = (0,1,-2)_e = f_2 - 2f_3 = (0,1,-2)_f = A(f_3)_f$.
   Det följer att:

$$[A]_f^f = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

   (e) På likande sätt ser man att:

$$[A]_f^e = \begin{bmatrix} 5 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & 0 \\ 2 & -6 & 0 \end{bmatrix}, [A]_e^f = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

2. (a) Låt S beteckna speglingen och P projektionen och låt $[S]$ respektive $[P]$ beteckna dessa matriser relativt standardbasen. Den sökta matrisen blir dåÊmatrisen $[P][S]$.

   En normal vektor till spegeln är till exempel $\vec{n} = (1,1,-2)$. Vektorerna $(1,-1,0),(2,0,1)$ är linjärt oberoende och ligger på planet. De bildar en bas b, med $\vec{n}$, till $\mathbf{R}^3$. Enligt definitionen av speglingen är: $S(1,-1,0) = (1,-1,0), S(2,0,1) = (2,0,1)$ och $S(\vec{n}) = -\vec{n}$. Då är:

$$[S]_b^e = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Eftersom

$$S(1,0,0)_e = [S]^e_b (e_1)_b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$S(0,1,0)_e = [S]^e_b (e_2)_b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{-5}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$S(0,0,1)_e = [S]^e_b (e_3)_b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

är $[S]^e_e = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

På likande sätt är $B = \{(1,0,1),(1,-2,0),(2,1,2)\}$ en bas till $\mathbf{R}^3$ sådan att $P(1,0,1) = (1,0,1), P(1.-2,0) = (1,-2,0), P(2,1,2) = 0$, och

$$[P]^e_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [P]^e_e = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Svaret blir då

$$[P]^e_e [S]^e_e = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 4 & -17 & 10 \\ -16 & 14 & 14 \\ -16 & -10 & -7 \end{bmatrix}$$

(b) Efersom är $det([P]^e_b = 0$ så är $det([P]^e_e) = 0$ och $det([P]^e_e [S]^e_e) = det([P]^e_e) det([S]^e_e) = 0$. Det viste man eftersom är P en projektion och därför är värdsmängden av PS ett delrummet av planet $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.

Nollrummet är givet av vektorerna som speglas på vektorer ortogonala till planet, d.v.s. v så att $Sv = (2,1,1)$. Man beräkna att Nollrummet är linjen $Span(7,4,4)$.

Rftersom är $nulllity(PS) = 1$ så är $\dim(R(PS)) = 2$ och d—ärför är värdsmängden lika med planet $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$.

3. Inte aktuell för KS4.

4. $A(0,0,0) = (0,0,1) \neq 0_{\mathbf{R}^3}$. Varje linjär avbildning bildar 0 till 0.

5. (a) Låt $S = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ vara en bas till $\mathbf{R}^4$. Definiera A genom att sätta:

$$A(e_1) = A(e_2) = 0, a(e_3) = e_1, A(e_4) = e_2.$$

Då är $A(x,y,z,w) = (z,w,0,0)$. $R(A) = Span(e_1,e_2)$ och $A(A((x,y,z,w)) = A((z,w,0,0)) = (0,0,0,0)$.

(b) $A^2 = 0$ betyder att $R(A) \subseteq Ker(A)$. Eftersom är $\dim(R(A)) = 2$ betyder detta att $\dim(Ker(A)) \geq 2$. Det följer att om $A : V \to V$ så ska $\dim(V) \geq 2 + 2 = 4$.