KTH, Matematik

Lösningar till tentamen i Linjär algebra, SF1604, för F1 och D1, den 17 december, 2008.

Del I

(totalt 15 poäng, inklusive bonuspoäng)

1. (a) (1 p.) Visa att mängden $B = \{(2,0,1),(1,2,4),(1,1,0)\}$ är en bas av $\mathbf{R}^3$.
Lösning: Mängden B är en bas av $\mathbf{R}^3$ om och endast om

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Vi utveckla ovanstående determinant i första rad, och ser att den är lika med

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -8 - 1 = -9.$$

(b) (2 p.) Skriv vektorn $(1,0,0)$ som linjär kombination av vektorena av B.
Lösning: Vi letar efter x_1, x_2, x_3 såatt

$$x_1(2,0,1) + x_2(1,2,4) + x_3(1,1,0) = (1,0,0).$$

Vi måste därför lösa det linjära ekvationssystem

$$\begin{cases} 2x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 & = 1 \\ \qquad\quad 2x_2 + \quad x_3 & = 0 \\ x_1 + \quad 4x_2 & = 0. \end{cases}$$

Genom Gauss elimination, får vi

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & -1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9/2 & -1 \end{array}\right).$$

Det följer att $x_3 = 2/9$, $x_2 = -x_3/2 = -1/9$ och $x_1 = (1 - x_3 - x_2)/2 = (1 - 2/9 + 1/9)/2 = 4/9$.

2. (a) (1 p.) Varför är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

inverterbar?
Lösning: Därför att

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-2) = 2 \neq 0.$$

(b) (2 p.) Beräkna inversen till A.
Lösning:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ 7 & -2 & -1 \end{pmatrix}^t,$$

och därmed är

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7/2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

3. (3 p.) Låt $W \subset \mathbf{R}^3$ vara delrummet

$$W = \{t(3,-2,1) \mid t \in \mathbf{R}\}.$$

Hitta en bas för det ortogonala komplementet $W^\perp$ relativt inre produkten

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + 3x_3 y_3.$$

Lösning: Komplementet $W^\perp$ är delrummet

$$W^\perp = \{(z_1, z_2, z_3) \mid \langle (3,-2,1), (z_1, z_2, z_3) \rangle = 0\} = \{(z_1, z_2, z_3) \mid 3z_1 - 4z_2 + 3z_3 = 0\},$$

och mängden

$$\{(-1,0,1), (0,3,4)\}$$

bildar en bas av $W^\perp$ dåmängden består av två linjära oberoende vektorer och $\dim(W^\perp) = 3 - \dim(W) = 2$.

4. Låt A vara 2×2 matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) (1 p.) Beräkna egenvärdena av A.
Lösning: Vi löser den karaktäristiska ekvationen

$$0 = \det(\lambda I_2 - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda + 4 & -3 \\ 5 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = (\lambda+4)(\lambda-4)+15 = \lambda^2 - 1 = (\lambda-1)(\lambda+1),$$

och får att egenvärdena av A är 1 och -1.

(b) (1 p.) Beräkna egenrum av A.
Lösning: Egenrum E_1 motsvarande egenvärde 1 är lösningsrummet till

$$(I_2 - A)v = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

så att

$$E_1 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}.$$

Egenrum E_{-1} motsvarande egenvärde -1 är lösningsrummet till

$$(-I_2 - A)v = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

så att

$$E_1 = \operatorname{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(c) (1 p.) Beräkna A^{101}.
Lösning: Vi börjar med att diagonalisera A. Låt

$$P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

vara basbytematris från basen $\{(3,5)^t, (1,1)^t\}$ av egenvektoren till standardbasen. Då är

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1},$$

och därför är

$$A^{101} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{101} P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Låt $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,0,1)$ och $v_3 = (0,1,1)$. Låt $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara linjära avbildningen definierad genom

$$f(v_1) = v_3,\ f(v_2) = v_1,\ f(v_3) = v_2.$$

(a) (1 p.) Hitta matrisframställningen av f relativt basen $\{v_1, v_2, v_3\}$.
Lösning:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) (2 p.) Hitta matrisframställningen av f relativt standardbasen.
Lösning: Basbytematris från basen $\{v_1, v_2, v_3\}$ till standardbasen är

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Därmed är matrisframställningen av f relativt standardbasen

$$\begin{aligned} P \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

DEL 2

(totalt 15 poäng, inklusive bonuspoäng)

1. Finns det några värden $a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$ sådana att följande matris är ortogonal?

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ c & 0 & d \\ e & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Lösning: En matris är ortogonal om och endast om kolonvektorerna utgör en ON bas.

Vektorerna är parvis ortogonala om och endast om:

$$a = 0, b = 0, cd + e = 0.$$

Vektorerna är normerade om och endast om

$$c^2 + a^2 + e^2 = 1, b^2 + d^2 = 1.$$

Man ser att det finns bara två möjligheter:

$$(a, b, c, d, e) = (0, 0, 1, 0, 0) \text{ och } (a, b, c, d, e) = (0, 0, -1, 0, 0).$$

2. (3 p.) Betrakta planet $\pi : 4x + ky + 2z = 5$ i $\mathbf{R}^3$. För vilka värden på parametern k är linjen

$$l = \begin{cases} x &= 2t + 3 \\ y &= -t - 1 \\ z &= 4 + t \end{cases}$$

vinkelrät (ortogonal) mot π?

Lösning: Linjen är vinkelrät (ortogonal) mot π om den är parallel med $(4, k, 2)$, normalvektorn till π.

Inriktningsvektorn till linjen är $\vec{v} = (2, -1, 1)$, och $(4, k, 2)$ är parallel till $(2, -1, 1)$ bara om det finns ett $t \in \mathbf{R}$ sådant att $(2, -1, 1) = t(4, k, 2)$. Det följer att $t = 2$ och $k = -2$.

3. (3 p.) Betrakta följande delmängd av $M_{2,2}(\mathbf{R})$:

$$W = \{A \in M_{2,2}(\mathbf{R}) \text{ sådan att } A + A^T = 0\} \subset M_{2,2}(\mathbf{R}).$$

(a) Visa att W är ett delrum till $M_{2,2}(\mathbf{R})$.
(b) Bestäm $\dim(W)$.

Lösning:

(a) Låt $A, B \in W$.

$$(A + B) + (A + B)^T = A + B + A^T + B^T = (A + A^T) + (B + B^T) = 0 + 0 = 0$$

som visar att $A + B \in W$.
Om $A \in W$ och $\lambda \in \mathbf{R}$ då gäller att:

$$(\lambda A) + (\lambda A)^T = \lambda(A + A^T) = \lambda \cdot 0 = 0$$

som visar att $\lambda A \in W$.

(b) Bestäm $\dim(W)$.

$$\text{Om } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W \Rightarrow a = d = 0, b = -c$$

Detta säger att för varje matris $A \in W$ det finns $t \in \mathbf{R}$ sådant att:

$$A = t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ d.v.s } S = Span\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

och därför är $\dim(W) = 1$.

4. (3 p.) Betrakta $\mathbf{C}$ (komplexa tal) som ett två dimensionallt reellt vektorrum.

(a) Visa att funktionen $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, F(z) = (1 + i)\overline{z}$ är en linjär avbildning.
(b) Bestäm $\dim(Ker(F))$ och $\mathrm{rang}(F)$ (= $\mathrm{rank}(F)$).

Lösning:

(a) Låt $z = \alpha + i\beta \in \mathbf{C}$, $z = (\alpha, \beta)$, med avseende till basen $[1, i]$. Funktionen F kan skrivas som $F(\alpha, \beta) = (\alpha + \beta, \alpha + \beta)$ eller

$$F(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

som visar att avbildningen är linjär.

(b)

$$\text{rang}(F) = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2.$$

Eftersom är $2 = \dim(\mathbf{C}) = \text{rang}(F) + \dim(Ker(F))$ är $\dim(Ker(F)) = 0$, d.v.s avbildningen är en isomorfi.

5. (3 p.) Betrakta polynomet $Q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz$. Observera att polynomet kan skrivas på matris form som följande:

$$Q(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Bestäm basbytet från standardbasen till en ortonormal bas B, sådan att

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_2^2 + 5x_3^2$$

där (x_1, x_2, x_3) är koordinaterna med avseende på basen B.

Lösning: Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

A är symmetrisk och därför den är ortogonalt diagonalizerbar.
Egenvärderna till A:
$p_A(\lambda) = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + 4\lambda - 20 = 0$ ger:

$$\lambda = 2, -2, 5.$$

För att hitta lösningarna kan man dela $p_A(\lambda)$ med $(\lambda - 2)$, $p_A(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 3\lambda - 10) = (\lambda - 2)(\lambda + 2)(\lambda - 5)$.
Egenvektorer: Man beräknar följande egenrum:

$$E_2 = Span((1, -2, 1)), E_{-2} = Span(1, 0, -1), E_5 = Span(1, 1, 1).$$

Detta betyder att med avseende till den ON basen av egenvektorer $B = (\frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1))$ så är

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_2^2 + 5x_3^2$$

Basbytematris från B till standardbasen är:

$$O = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

Och Basbytematris från standardbasen till B är O^T.

DEL 3

1. (5 p.) Låt $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ vara en linjär avbildning sådan att $F \neq id_{\mathbf{R}^n}$ och sådan att $F \circ F = F$. Visa att:

   (a) F inte kan vara en isomorfi.

   (b) Egenvärdena till F kan bara vara lika med 0 eller 1.

   Lösning:

   (a) Om F vara en isomorfi så skulle F vara inverterbar, som innebär att:

   $$F = F^{-1} \circ F \circ F = F^{-1} \circ F = id_{\mathbf{R}^n}.$$

   Eftersom vi antar att $F \neq id_{\mathbf{R}^n}$ så kan F inte vara inverterbar.

   (b) Låt λ vara ett egenvärde till F, d.v.s $F(\vec{(v)}) = \lambda\vec{v}$ för någon vektor $\vec{v} \neq 0$.(Vi vet att $\lambda = 0$ är ett egenvärde eftersom $\det([F]) = 0$) Det följer att:

   $$F \circ F(\vec{v}) = F(\lambda\vec{v}) = \lambda F(\vec{v}) = \lambda^2\vec{v}$$

   och $F \circ F(\vec{v}) = F(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$. Från $\lambda\vec{v} = \lambda^2\vec{v}$ så ser man att $\lambda(\lambda - 1) = 0$.

2. (5 p.) Låt λ vara ett godtyckligt reellt tal. Betrakta matriserna

   $$A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, ...,\ A_n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

   Beräkna, genom induktion, determinanten av matrisen A_n.
   Lösning: Påstående:

   $$\det(A_n) = \lambda^n - \lambda^{n-2} + \lambda^{n-3} + ... + (-1)^n\lambda + (-1)^{n+1}.$$

   Bevis genom induktion:

   - **Basfall:** $n = 2$:
   $$\det(A_2) = \det\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

   - **Induktionssteg:** Antag att påstående är sann för $n - 1$. Vi har

   $$\begin{aligned} \det(A_n) &= \lambda\det(A_{n-1}) + (-1)^{n+1} \\ &= \lambda(\lambda^{n-1} - \lambda^{n-3} + \lambda^{n-4} + ... + (-1)^{n-1}\lambda + (-1)^n) + (-1)^{n+1} \\ &= \lambda^n - \lambda^{n-2} + \lambda^{n-3} + ... + (-1)^n\lambda + (-1)^{n+1}, \end{aligned}$$

   som visar att påståendet är sann för n.