KTH, Matematik

Tentamen i Linjär algebra, SF1604, för F1 och D1, den 17 december, 2008.
OBS Svaret skall motiveras och lösningen skrivas, ordentligt och klart. Inga hjälpmedel är tillåtna.

Betyg enligt följande tabell:

A	minst 35 poäng
B	minst 30 poäng
C	minst 25 poäng
D	minst 20 poäng
E	minst 15 poäng
Fx	13-14 poäng

Betyg Fx ger möjlighet till att komplettera till betyg E. Datumet och formen på kompletteringsprovet meddelas via email.

Del I

(totalt 15 poäng, inklusive bonuspoäng)

1. (a) (1 p.) Visa att mängden $B = \{(2,0,1),(1,2,4),(1,1,0)\}$ är en bas av $\mathbf{R}^3$.
   (b) (2 p.) Skriv vektorn $(1,0,0)$ som linjär kombination av vektorena av B.

2. (a) (1 p.) Varför är matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
   inverterbar?
   (b) (2 p.) Beräkna inversen till A.

3. (3 p.) Låt $W \subset \mathbf{R}^3$ vara delrummet
$$W = \{t(3,-2,1) \mid t \in \mathbf{R}\}.$$
   Hitta en bas för det ortogonala komplementet $W^\perp$ relativt inre produkten
$$\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3.$$

4. Låt A vara 2×2 matrisen
$$A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}.$$
   (a) (1 p.) Beräkna egenvärdena av A.
   (b) (1 p.) Beräkna motsvarande egenrum (delrum av egenvektorer).
   (c) (1 p.) Beräkna A^{101}.

5. Låt $v_1 = (1,1,0)$, $v_2 = (1,0,1)$ och $v_3 = (0,1,1)$. Låt $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ vara linjära avbildningen definierad genom
$$f(v_1) = v_3,\ f(v_2) = v_1,\ f(v_3) = v_2.$$
   (a) (1 p.) Hitta matrisframställningen av f relativt basen $\{v_1, v_2, v_3\}$.
   (b) (2 p.) Hitta matrisframställningen av f relativt standardbasen.

DEL 2

(totalt 15 poäng, inklusive bonuspoäng)

1. Finns det några värden $a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$ sådana att följande matris är ortogonal?

$$\begin{pmatrix} a & 1 & b \\ c & 0 & d \\ e & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. (3 p.) Betrakta planet $\pi : 4x + ky + 2z = 5$ i $\mathbf{R}^3$. För vilka värden på parametern k är linjen

$$l = \begin{cases} x &= 2t+3 \\ y &= -t-1 \\ z &= 4+t \end{cases}$$

vinkelrät (ortogonal) mot π?

3. (3 p.) Betrakta följande delmängd av $M_{2,2}(\mathbf{R})$:

$$W = \{A \in M_{2,2}(\mathbf{R}) \text{ sådan att } A + A^T = 0\} \subset M_{2,2}(\mathbf{R}).$$

   (a) Visa att W är ett delrum till $M_{2,2}(\mathbf{R})$.
   (b) Bestäm $\dim(W)$.

4. (3 p.) Betrakta $\mathbf{C}$ (komplexa tal) som ett två dimensionallt reellt vektorrum.
   (a) Visa att funktionen $F : \mathbf{C} \to \mathbf{C}, F(z) = (1+i)\overline{z}$ är en linjär avbildning.
   (b) Bestäm $\dim(Ker(F))$ och $\mathrm{rang}(F)$ $(= \mathrm{rank}(F))$.

5. (3 p.) Betrakta polynomet $Q(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz$. Observera att polynomet kan skrivas på matris form som följande:

$$Q(x,y,z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Bestäm basbytet från standardbasen till en ortonormal bas B, sådan att

$$Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 2x_2^2 + 5x_3^2$$

där (x_1, x_2, x_3) är koordinaterna med avseende på basen B.

DEL 3

1. (5 p.) Låt $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ vara en linjär avbildning sådan att $F \neq id_{\mathbf{R}^n}$ och sådan att $F \circ F = F$. Visa att:
   (a) F inte kan vara en isomorfi.
   (b) Egenvärdena till F kan bara vara lika med 0 eller 1.

2. (5 p.) Låt λ vara ett godtyckligt reellt tal. Betrakta matriserna

$$A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}, \ldots,\ A_n = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Beräkna, genom induktion, determinanten av matrisen A_n, för $n \geq 2$.