KTH, Matematik

Lappskrivning nummer 5 till kursen Linjär algebra, SF1604, för F1 den 24/11 2008, 10:15-10:55.

Namn/person-nummer:

Resultat:

Godkänd på uppgift 1 ger 1 bonus poäng till Del I av tentamen och omtentamen. Godkänd på uppgift 2 ger 1 bonus poäng till Del II av tentamen och omtentamen.

OBS Svaret skall motiveras och lösningen skrivas, ordentligt och klart, på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Låt $F : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^4$ vara den linjär avbildning definierad av:

$$F(v_1) = u_2 + 2u_3, F(v_2) = -u_1 + u_4, F(v_3) = 2u_1 + u_2$$

där $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ är en bas till $\mathbf{R}^3$ och $B` = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ är en bas till $\mathbf{R}^4$. Bestäm $rang(F)$ och $nullity(F)$.

Lösning

$$[F]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$Ker(F) = \{v \in \mathbf{R}^3 \text{sådan att} [F]_B^{B'} v = 0\}$ och $nullity(F) = \dim(Ker(F))$.
$Ker(F)$ består av lösningarna (x, y, z) till systemet

$$\begin{cases} & -y & +2z & = 0 \\ x & & +z & = 0 \\ 2x & & & = 0 \\ & y & & = 0 \end{cases}$$

Det följer att $Ker(F) = \{0\}$ och $nullity(F) = 0$. Från formeln $3 = nulity(F) + rang(F)$, så får man att $rang(F) = 3$.

2. Betrackta matrisen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finns det en ortogonal matrir O och en diagonal matris D sådana att $D = O^{-1}AO$?

Om svaret är ja, hitta matriserna O och D.

Lösning Ertersom matrisen äe symmetrisk då är matrisen ortogonalt diagonaliserbar, som betyder att det finns en ortogonal matrir O och en diagonal matris D sådana att $D = O^{-1}AO$.

Från $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) = (1-\lambda)^3 - 4(1-\lambda) = (1-\lambda)(1 - 2\lambda + \lambda^2 - 4)$ så hittar man egenvärdena till A :

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(\lambda-3)(\lambda+1) = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -1.$$

Egenvektorer från skilda evenvärden utgör en ortogonal bas B:

$$B = bas(E_1) \cup bas(E_3) \cup bas(E_{-1}).$$

$$\lambda = 1, (A - I_3)v = 0 \text{ ger } \left\{ \begin{array}{c} 2z = 0 \\ 2x = 0 \end{array} \right. \quad E_1 = Span((0,1,0)).$$

$$\lambda = 3, (A - 3I_3)v = 0 \text{ ger } \left\{ \begin{array}{c} -2x + 2z = 0 \\ -2y = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{array} \right. \quad E_3 = Span((1,0,1)).$$

$$\lambda = -1, (A + I_3)v = 0 \text{ ger } \left\{ \begin{array}{c} 2x + 2z = 0 \\ 2y = 0 \\ 2x + 2z = 0 \end{array} \right. \quad E_{-1} = Span((1,0,-1)).$$

After vi normerar egenvektorerna så får vi en ON bas till $\mathbf{R}^3$:

$$B = \{(0,1,0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\}.$$

O är den ortogonala metrisen som beskriver basbytet från basen B till standardbasen S och D är den diagonala matrisen med egenvärden på diagonalen:

$$O : \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$