KTH, Matematik

Lappskrivning nummer 3 till kursen Linjär algebra, SF1604, för F1 den 7/11 2008, 10:15-10:55.

Namn/person-nummer:

Resultat:

Godkänd på uppgift 1 ger 1 bonus poäng till Del I av tentamen och omtentamen. Godkänd på uppgift 2 ger 1 bonus poäng till Del II av tentamen och omtentamen.

OBS Svaret skall motiveras och lösningen skrivas, ordentligt och klart, på detta papers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm en minstakvadrat lösning (least square solution) till följande system i variablerna x, y.

$$\begin{cases} -x & + & y & = & 0 \\ & & y & = & 1 \\ x & + & y & = & 3 \\ 2x & + & y & = & 9 \end{cases}$$

Lösning: Systemet skrivs som $Ax = b$, där

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, A^T b = \begin{pmatrix} 21 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Den minstakvadrata lösningen är den unik lösning till systemey $A^T Ax = A^T b$, som är

$$(x, y) = (2.9, 1.8).$$

2. Betrakta följande funktion:

$$T : P_2(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}^3 \text{ definierad av } T(p(x)) = (p(0), p(1), p(2)).$$

(a) Visa att T är en linjär avbildning.

(b) Bestäm värdsrummet $R(T)$.

(Kom ihåg att $P_2(\mathbf{R})$ är vektor rummer av polynom $p(x)$ med $\deg(p(x)) \leq 2$.)

Lösning: om $p(x) = a + bx + cx^2$ så är $T(p(x)) = (a, a + b + c, a + 2b + 4c)$.

(a) låt $p_1(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2, p_2(x) = a_2 + b_2x + c_2x^2$, så är $(p_1 + p_2)(x) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)x^2$ och

$$T((p_1 + p_2)(x)) = (a_1 + a_2, a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 +_2, a_1 + a_2 + 2b_1 + 2b_2 + 4c_1 + 4c_2) =$$

$$= (a_1, a_1 + b_1 + c_1, a_1 + 2b_1 + 4c_1) + (a_2, a_2 + b_2 + c_2, a_2 + 2b_2 + 4c_2) = T(p_1(x)) + T(p_2(x)).$$

$$T(\lambda p(x)) = (\lambda a, \lambda a + \lambda b + \lambda c, \lambda a + 2\lambda b + 4\lambda c) = \lambda(a, a + b + c, a + 2b + 4c) = \lambda T(p(x)).$$

(b) Låt $S = \{1, x, x^2\}$ vara den stardardbasen till $P_2(\mathbf{R})$. Då är $T(1) = (1,1,1), T(x) = (0,1,2), T(x^2) = (0,1,4)$, och

$$[T]_S^S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Eftersom är $\det([T]_S^S) \neq 0$ är kolonnerna linjärt oberoende och $\dim(R(T)) = 3$ som betyder $R(T) = \mathbf{R}^3$.

Man kan också visa att för varje $(w, u, t) \in \mathbf{R}^3$ finns det något $p(x) = a + bx + cx^2$ sådant att

$$\begin{cases} a & & & = & w \\ a & +b & +c & = & u \\ a & +2b & +4c & = & t \end{cases}$$

Systemet har lösningen $(a, b, c) = (w, \frac{-3w+4u-t}{2}, \frac{w-2u+t}{2})$ som betyder att

$$T(w, +\frac{-3w + 4u - t}{2}x + \frac{w - 2u + t}{2}x^2) = (w, u, t).$$

Det följer att $\mathbf{R}^3 \subset R(T)$ och $R(T) \subseteq \mathbf{R}^3$ och då är $R(T) = \mathbf{R}^3$