KTH, Matematik

Lappskrivning nummer 3 till kursen Linjär algebra, SF1604, för F1 den 10/10 2008, 10:15-10:55.

Namn/person-nummer:

Resultat:

Godkänd på uppgift 1 ger 1 bonus poäng till Del I av tentamen och omtentamen. Godkänd på uppgift 2 ger 1 bonus poäng till Del II av tentamen och omtentamen.

OBS Svaret skall motiveras och lösningen skrivas, ordentligt och klart, på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm parameterekvationen till den linje $L \subset \mathbf{R}^3$, som uppffyller följande krav:

   (a) L går igenom punkten $P = (1, -1, 1)$,

   (b) L är parallel till planet med ekvation $x - 3y = 2$ och

   (c) L är ortogonal (vinkelrät) till linjen $(0, 0, 1) + t(2, 1, 1)$.

   Lösning. Vektorn $\vec{n} = (1, -3, 0)$ är en normal vektor till planet $x - 3y = 2$ och så ska linjen L vara ortogonal mot $\vec{n}$. Vektorn $\vec{v} = (2, 1, 1)$ är riktningsvektor till linjen $(0, 0, 1) + t(2, 1, 1)$ och så ska linjen L vara ortogonal mot $\vec{v}$.

   Det följer att L är parallel till vektor $\vec{w} = \vec{n} \times \vec{v} = (3, -1, 7)$. Parameterekvationen till linjen L är därför:
   $$(1, -1, 1) + t(3, -1, 7).$$

2. Låt $\vec{v_1} = (3, 1, 0, 1), \vec{v_2} = (1, 1, 0, 0)$, och betrackta följande delmängd:
   $$W = \{\vec{v} \in \mathbf{R}^4 \text{ sådan att } \vec{v} \perp \vec{v_1} \text{ ich } \vec{v} \perp \vec{v_2}\} \subseteq \mathbf{R}^4.$$

   (a) Visa att W är ett delrum till $\mathbf{R}^4$.

   (b) Bestäm $\dim(W)$.

   (Kom ihåg att beteckningen $\vec{v} \perp \vec{w}$ betyder att vektorerna $\vec{v}$ och $\vec{w}$ är ortogonala (vinkelräta)).

   Lösning.

   (a) Detta kan man lösa på olika sätt:
   (lösning i) Låt $\vec{w_1}, \vec{w_2} \in W$, och $\lambda \in \mathbf{R}$, då är
   $$\vec{v_i} \cdot (\vec{w_1} + \vec{w_2}) = \vec{v_i} \cdot \vec{w_1} + \vec{v_i} \cdot \vec{w_2} = 0 + 0 = 0, \text{ och } \vec{v_i} \cdot (\lambda \vec{w_1}) = \lambda \vec{v_i} \cdot \vec{w_1} \lambda \cdot 0 = 0, i = 1, 2.$$
   Så gäller det att $\vec{w_1} + \vec{w_2} \in W$ och $\lambda \vec{w_1} \in W$, som visar att W är ett delrum till $\mathbf{R}^4$.
   (lösning ii) Eftersom $\vec{v} = (x, y, z, w) \in W$ om och endast om $(x, y, z, w) \cdot (3, 1, 0, 1) = 0$ och $(x, y, z, w) \cdot (1, 1, 0, 0) = 0$ så kan W också beskrivas som delrummet av lösningarna till följande linjära homogena system med 4 obekanta (x, y, z, w) :
   $$\begin{cases} 3x & +y & +w & = 0 \\ x & +y & & = 0 \end{cases}$$

(b) Från lösning (ii) av (a) så ser man att en vektor i W skrivs som

$$t(1, -1, 0, 2) + k(0, 0, 1, 0) \text{ för några } t, k \in \mathbf{R}$$

som betyder att $W = Span((1, -1, 0, 2), (0, 0, 1, 0))$. Dessutom är $(1, -1, 0, 2)$ och $(0, 0, 1, 0)$ linjärt oberoende eftersom

$$t(1, -1, 0, 2) + k(0, 0, 1, 0) = (0, 0, 0, 0) \Leftrightarrow t = k = 0.$$

Så är $\{(1, -1, 0, 2), (0, 0, 1, 0)\}$ en bas till W och $\dim(W) = 2$.