KTH, Matematik

Lappskrivning nummer 2 till kursen Linjär algebra,
SF1604, för F1 den 26/9 2008, 10:15-10:55.
Text och lösning

Godkänd på uppgift 1 ger 1 bonus poäng till Del I av tentamen och omtentamen. Godkänd på uppgift 2 ger 1 bonus poäng till Del II av tentamen och omtentamen.

OBS Svaret skall motiveras och lösningen skrivas, ordentligt och klart, på detta pappers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm samtliga värden på det reella talet $h \in \mathbf{R}$ för vilka följande matris A är inverterbar och beräkna inversen.

$$A = \begin{pmatrix} h+1 & 0 & 6 \\ 0 & h & 3 \\ 0 & 0 & h-1 \end{pmatrix}$$

$$det(A) = h(k+1)(k-1) = h^3 - h$$

Eftersom är en kvadratisk matris inverterbar om och endast om determinanten är skild från noll, så är A inverterbar om och endast om $h \neq 0, 1, -1$.

I fallet $h \neq 0, 1, -1$ så är
$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} adj(A).$$

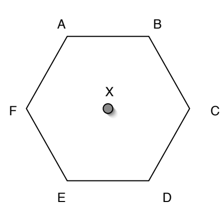
Kofaktorerna till A är

$$\begin{array}{ccc} C_{1,1} = h(h-1) & C_{2,1} = 0 & C_{3,1} = -6h \\ C_{1,2} = 0 & C_{2,2} = (h+1)(h-1) & C_{3,2} = -3(h+1) \\ C_{1,3} = 0 & C_{2,3} = 0 & C_{3,3} = h(h+1) \end{array}$$

Det följer att

$$A^{-1} = \frac{1}{h^3 - h} \begin{pmatrix} h(h-1) & 0 & -6h \\ 0 & (h+1)(h-1) & -3(h+1) \\ 0 & 0 & h(h+1) \end{pmatrix}$$

2. Betrakta en liksidig sexhörning i planet med hörnen $ABCDEF$, och låt X vara sexhörningens centerpunkt. Beräkna vektorn $\vec{XA} + \vec{XB} + \vec{XC} + \vec{XD} + \vec{XE} + \vec{XF}$.



Observera att, eftersom X är sexkantigs centerpunkt, så är

$$\|\vec{XA}\| = \|\vec{XA}\|, \|\vec{XE}\| = \|\vec{XD}\|, \|\vec{XF}\| = \|\vec{XC}\|$$

Låt $\vec{XA} = \vec{b}, \vec{XE} = \vec{c}$, så är: $\vec{XD} = -\vec{b}, \vec{XB} = -\vec{c}$
Dessutom är $\vec{XC} = -\vec{c} - \vec{b}$ och $\vec{XF} = \vec{b} + \vec{c}$
Det följer att:

$$\vec{XA} + \vec{XB} + \vec{XC} + \vec{XD} + \vec{XE} + \vec{XF} = \vec{b} - \vec{c} - \vec{c} - \vec{b} - \vec{b} + \vec{c} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$