KTH, Matematik

Lappskrivning nummer 1 till kursen Linjär algebra, SF1604, för F1 den 12/9 2008, 10:15-10:55.

Namn/person-nummer:

Resultat:

Godkänd på uppgift 1 ger 1 bonus poäng dil Del I av tentamen och omtentamen. Godkänd på uppgift 2 ger 1 bonus poäng dil Del II av tentamen och omtentamen.

OBS Svaret skall motiveras och lösningen skrivas, ordentligt och klart, på detta papers fram- och baksida. Inga hjälpmedel är tillåtna.

1. Bestäm, för varje reellt tal $h \in \mathbf{R}$, lösningarna till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x & + & hy & + & hz & = & 1 \\ x & + & hy & + & z & = & 0 \\ x & & & - & hz & = & 0 \end{cases}$$

Svar: Gauss eliminering ger:

$$\begin{bmatrix} 1 & h & h & 1 \\ 1 & h & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -h & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & h & h & 1 \\ 0 & 0 & 1-h & -1 \\ 0 & -h & -2h & -1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & h & h & 1 \\ 0 & -h & -2h & -1 \\ 0 & 0 & 1-h & -1 \end{bmatrix}$$

Om $h = 0, 1$ då saknar systemet lösningar. Om $h \neq 0, 1$, då har systemet en unik lösning: $(x, y, z) = (-\frac{h}{1-h}, \frac{1+h}{h(1-h)}, \frac{1}{1-h})$.

$h \neq 0, 1$ unik lösning, $h = 0, 1$ ingen lösning.

2. En matris $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ kallas symmetrisk om $a_{ij} = a_{ji}$ för varje i, j. Visa att om $A = (a_{ij}) \in M_{n,n}(\mathbf{R})$ är symmetrisk sådan att $A^2 = A$, då är

   (a) $tr(A) \geq 0$ och

   (b) $tr(A) = 0$ om och endast om $A = 0$.

   ($tr(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ betecknar spåret av A.)

   Lösning: Enligt matrisprodukts reglerna så har vi att:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}^2 + a_{12}^2 + \ldots + a_{1n}^2 & = & a_{11} \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 + \ldots + a_{2n}^2 & = & a_{22} \\ \ldots & & \ldots \\ a_{n1}^2 + a_{n2}^2 + \ldots + a_{nn}^2 & = & a_{nn} \end{array}$$

Det följer att $a_{ii} \geq 0$ för varje $i = 1, \ldots, n$ och att $a_{ii} = 0$ om och endast om $a_{ij} = 0$ för $j = 1, \ldots, n$. Eftersom $a_{ii} \geq 0$ för varje $i = 1, \ldots, n$ så ät $tr(A) > 0$.

Om $A = 0$ då är $tr(A) = 0$. Om $tr(A) = 0$, eftersom $a_{ii} \geq 0$ för varje $i = 1, \ldots, n$, så är $a_{ii} = 0$ för varje $i = 1, \ldots, n$. Det följer att $a_{ij} = 0$ för $j = 1, \ldots, n$ och $i = 1, \ldots, n$, som betyder att $A = 0$.