INGENJÖRSHÖGSKOLAN
Matematik
Fredrik Abrahamsson

INGENJÖRSHÖGSKOLAN
HÖGSKOLAN I JÖNKÖPING

Valmatematik

Antag att vi i ett visst land har tre partier att välja mellan när vi röstar - vi representerar partierna med färgerna blå, röd och grön. Resultatet från ett val kan vi då beskriva med en vektor

$$x = \begin{pmatrix} b \\ r \\ g \end{pmatrix}$$

där b, r, g är andelen som röstade på det blå, röda resp. gröna partiet. T.ex. om

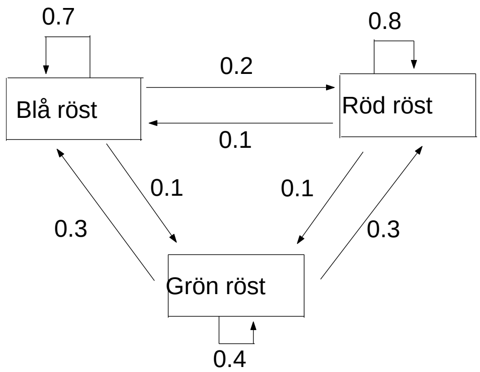
$$x = \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.40 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

så betyder det att 35% röstade blått, 40% röstade rött och slutligen att 25% röstade grönt. Observera att vi här bortser från blankröster och andra mindre partier vilket får konsekvensen att $b + r + g = 1$. En vektor med denna egenskap kallas ibland för *sannolikhetsvektor*.

Markovkedjor

Låt nu $x_0, x_1, x_2, \ldots$ vara resultatvektorerna från ett antal efterföljande val. En intressant fråga i detta sammanhang är om det finns något samband mellan resultatet från två intilliggande val, dvs. om vi vet x_k, säger detta någonting om x_{k+1}?

Med avsikt att försöka besvara denna fråga så analyserar vi statistik från många tidigare val. Då visar det sig att ca. 70% av de som röstade blått i ett visst val också röstade blått i nästkommande val, 20% av dess väljare röstade däremot rött i nästkommande val medans 10% röstade grönt. Vi gör en liknande undersökning för de två andra partierna och resultatet redovisas i figuren här intill.



Med

$$x_k = \begin{pmatrix} b_k \\ r_k \\ g_k \end{pmatrix}, \; k = 0, 1, 2, \ldots$$

kan vi uttrycka dessa samband som linjära ekvationer enligt

$$\begin{cases} b_{k+1} = 0.7b_k + 0.1r_k + 0.3g_k \\ r_{k+1} = 0.2b_k + 0.8r_k + 0.3g_k \\ g_{k+1} = 0.1b_k + 0.1r_k + 0.4g_k \end{cases}$$

eller med matriser $x_{k+1} = Px_k$ där

$$P = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}.$$

Observera att P är en matris vars kolonner är sannolikhetsvektorer. En sådan matris kallas för en *stokastisk* matris. Alltså har vi då en följd $x_0, x_1, x_2, \dots$ av sannolikhetsvektorer samt en stokastisk matris P sådan att $x_{k+1} = Px_k$. En sådan följd är ett exmpel på vad matematiker kallar för en *Markovkedja*. T.ex. om (som ovan)

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.40 \\ 0.25 \end{pmatrix}$$

så får vi resultatet i nästa val till att bli

$$x_1 = Px_0 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.35 \\ 0.40 \\ 0.25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.465 \\ 0.175 \end{pmatrix}.$$

Ytterligare ett val senare får vi resultatet

$$x_2 = Px_1 = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.1 & 0.3 \\ 0.2 & 0.8 & 0.3 \\ 0.1 & 0.1 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.36 \\ 0.465 \\ 0.175 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3510 \\ 0.4965 \\ 0.1525 \end{pmatrix}.$$

Kan vi spå framtiden?

En intressant fråga angående Markovkedjor i allmänhet är om det går att förutsäga vad som sker långt fram i kedjan, dvs. givet $_0$, hur uppför sig x_k för stora värden på k? I vårt exempel är det alltså fråga om att analysera om vi ser en trend i väljarnas mönster - blir fördelningen av väljarna alltmer konstant? Om P är en stokastisk matris och om q är en sannolikhetsvektor sådan att $Pq = q$ så kallas q för en *jämnviktsvektor*. Vi observerar att q svarar mot ett stationärt tillstånd för kedjan, dvs. om $x_k = q$ för något k så är $q = x_{k+1} = x_{x+2} = \dots$. Observera att q är ingenting annat än en egenvektor till P hörande till egenvärdet 1.

Jajamen!

Man kan visa att varje stokastisk matris med enbart positiva element har en entydig jämnviktsvektor q. Dessutom gäller för en godtycklig startvektor x_0 att markovkedjan konvergerar mot q, dvs. $x_k \to q$ då $k \to \infty$. Det spelar alltså ingen roll var vi startar någonstans, vi kommer ändå att närma oss det stationära tillståndet!

Hur går det för våra partier?

Med hjälp av resultatet ovan kan vi nu spå hur regeringen kommer att se ut i framtiden. Vi beräknar helt enkelt jämnviktsvektorn till vår Markovkedja, dvs. den sannolikhetsvektor som är egenvektor till P med egenvärdet 1. Därför betraktar vi ekvationen $(P - I)x = \mathbf{0}$ och vi får lösningsmängden

$$x = t \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix}$$

där $t \neq 0$. Följaktligen fås jämnviktsvektorn

$$q = \frac{1}{9 + 15 + 4} \begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/28 \\ 15/28 \\ 4/28 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.32 \\ 0.54 \\ 0.14 \end{pmatrix}.$$

Slutsatsen är därför att *oberoende* av startläge så kommer

$$x_k \to \begin{pmatrix} 0.32 \\ 0.54 \\ 0.14 \end{pmatrix} \quad \text{då } k \to \infty,$$

dvs. det verkar bli en röd regering i framtiden.