INGENJÖRSHÖGSKOLAN
Matematik
Fredrik Abrahamsson

Djuruppfödning

En djuruppfödare är intresserad av att veta hur många djur han kan sälja årligen utan att det påverkar hans totala djurpopulation alltför negativt. Låt oss försöka konstruera en enkel matematisk modell för detta ändamål.

Om vi antar att djuren blir könsmogna efter 1 år och reproducerar sig därefter så är det intressant att veta dels hur många ungdjur (icke könsmogna) som finns och dels hur många vuxna djur (könsmogna) som finns. Låt därför u_k och v_k beteckna antalet ungdjur resp. vuxna djur i djuruppfödarens ägo år k.

Vi antar nu att reproduktionshastigheten beskrivs av en parameter f, dvs. vi antar att från v_k vuxna djur får vi ett tillskott av $f \cdot v_k$ ungdjur året därpå. I samma anda så antar vi vidare att av u_k ungdjur och v_k vuxna djur så avlider $d_u \cdot u_k$ resp. $d_v \cdot v_k$ av dessa under året. Slutligen antar vi att uppfödaren säljer en andel s av de vuxna djuren årligen, dvs. från v_k vuxna djur säljs $s \cdot v_k$.
Sammantaget kan vi nu skriva ned ett samband mellan populationen u_k, v_k år k och populationen u_{k+1}, v_{k+1} år $k+1$ enligt följande.

$$\begin{cases} u_{k+1} = f v_k \\ v_{k+1} = u_k + v_k - d_u u_k - d_v v_k - s u_k \end{cases} \quad \text{eller} \quad \begin{cases} u_{k+1} = f v_k \\ v_{k+1} = (1 - d_u) u_k + (1 - d_v - s) v_k \end{cases}$$

Om vi nu definierar

$$X_k = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}, \; k = 0, 1, 2, \dots \;, \text{ och } A = \begin{pmatrix} 0 & f \\ (1 - d_u) & (1 - d_v - s) \end{pmatrix}$$

så kan ekvationerna formuleras som det eleganta matrissambandet

$$X_{k+1} = A X_k, \; k = 0, 1, 2, \dots$$

Differensekvationer

Ett matrissamband av typen

$$X_{k+1} = A X_k, \; k = 0, 1, 2, \dots$$

är ett exempel på ett dynamiskt system som har formen av en s.k. *differensekvation.* En lösning utgörs av den följd av vektorer $X_0, X_1, X_2, \dots$ som är relaterade till varandra enligt differensekvation $X_{k+1} = A X_k$. Dylika differensekvationer uppträder naturligt i många linjära modeller och intressanta frågeställningar är t.ex.

1. För ett givet begynnelsetillstånd X_0, finns det en vektor X^* sådan att $\lim_{k \to \infty} X_k = X^*$?
2. Om vi kan visa att gränsvärdet X^* existerar, kan vi då också beräkna X^*?
3. För ett givet begynnelsetillstånd X_0, kan vi hitta en formel som låter oss beräkna X_k uttryckt i X_0?
4. Givet en vektor Y, kan vi bestämma X_0 så att $X_k = Y$?
5. Givet en vektor X^*, kan vi bestämma X_0 så att $\lim_{k \to \infty} X_k = X^*$?

En lösningsmetod

Om begynnelsetillståndet X_0 är känt så kan man beräkna $X_1, X_2, \ldots$ enligt

$$\begin{aligned}
&X_1 = AX_0\\
&X_2 = AX_1 = A^2X_0\\
&X_3 = AX_2 = A^2X_1 = A^3X_0\\
&\ldots\\
&X_k = A^kX_0,\ k = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

Alltså har vi en lösningsformel $X_k = A^kX_0$ dvs. vi har i princip besvarat fråga nummer 3 ovan. Problemet med denna formel är att vi måste beräkna (stora) potenser av en matris, A^k och det innebär mycket arbete. De övriga frågorna är också ganska komplicerade att besvara enbart med denna formel. Kan vi möjligen hitta en mer explicit formel? Ja ibland går det, t.ex. om vi antar att matrisen A är diagonaliserbar. Då kan vi skriva

$$A = SDS^{-1}$$

där D är den diagonalmatris som har egenvärdena till A som diagonalelement och S är den matris som har motsvarande egenvektorer som kolonner. Fördelen är att nu blir det enkelt att beräkna A^k;

$$A^k = (SDS^{-1})^k = SDS^{-1}SDS^{-1}\ldots SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^kS^{-1}$$

dvs. vi behöver bara kunna beräkna stora potenser av D. Men detta är enkelt eftersom D är en diagonalmatris! T.ex. om (i $2 \times 2-$fallet)

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \text{ så är } D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix}.$$

Vi kan även besvara de två första frågorna nu; gränsvektorn X^* existerar om och endast om $\lim_{k\to\infty} D^k$ existerar dvs. om och endast om $|\lambda_1| \leq 1$ och $|\lambda_2| \leq 1$.

Åter till farmen

Låt oss nu försöka använda djuruppfödarens modell till att bestämma andelen vuxna djur s som skall säljas på ett sådant sätt att populationen varken dör ut eller växer utan övre gräns. Vi antar att $f = 0.9$, $d_u = 0.1$ samt att $d_v = 0.2$. Då är $X_k = A^kX_0$ där

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0.9 \\ 0.9 & 0.8 - s \end{pmatrix}.$$

Observera att denna matris är symmetrisk och därmed diagonaliserbar. Låt oss kalla egenvärdena till A för λ_1 och λ_2 och samtidigt anta att $|\lambda_1| \geq |\lambda_2|$. Då gäller (enligt diskussionen ovan) att om $|\lambda_1| < 1$ så kommer populationen att dö ut, dvs.

$$X_k \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Om $|\lambda_1| > 1$ så medför det med ett liknande argument att

$$X_k \to \begin{pmatrix} \infty \\ \infty \end{pmatrix}$$

dvs. populationen växer obegränsat. Alltså vill vi bestämma andelen sålda djur s så att $|\lambda_1| = 1$. Det karakteristiska polynomet till A ges av

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - (0.8 - s)\lambda - 0.81\,.$$

Eftersom $p(1) = s - 0.61$ så kan vi välja $s = 0.61$ och därmed få $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -0.81$. Alltså kan djuruppfödaren sälja 61% av de vuxna djuren utan att populationen riskerar att dö ut eller att population växer okontrollerat. Med denna försäljningsandel kommer populationen att närma sig ett jämnviktsfördelning där det går 9 ungdjur för varje 10 vuxna djur, dvs.

$$\lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{v_k} = \frac{9}{10}\,.$$

För att visa detta diagonaliserar vi A. Man får $A = SDS^{-1}$ där

$$S = \begin{pmatrix} 9 & 10 \\ 10 & -9 \end{pmatrix} \text{ och } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0.81 \end{pmatrix}\,.$$

Då kan vi enkelt beräkna

$$A^k = SD^kS^{-1} = \cdots = \frac{1}{181}\begin{pmatrix} 81 + 100(-0.81)^k & 90 - 90(-0.81)^k \\ 90 - 90(-0.81)^k & 100 + 81(-0.81)^k \end{pmatrix}$$

så att med

$$X_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

får vi

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} X_k &= \lim_{k\to\infty} A^kX_0 = \lim_{k\to\infty} SD^kS^{-1}X_0 \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{181}\begin{pmatrix} 81 + 100(-0.81)^k & 90 - 90(-0.81)^k \\ 90 - 90(-0.81)^k & 100 + 81(-0.81)^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{181}\begin{pmatrix} 81 & 90 \\ 90 & 100 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{181}\begin{pmatrix} 81u_0 + 90v_0 \\ 90u_0 + 100v_0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Alltså gäller att $X_k \to X^*$ där

$$X^* = \begin{pmatrix} u^* \\ v^* \end{pmatrix} = \frac{1}{181}\begin{pmatrix} 81u_0 + 90v_0 \\ 90u_0 + 100v_0 \end{pmatrix}$$

och

$$\frac{u^*}{v^*} = \frac{81u_0 + 90v_0}{90u_0 + 100v_0} = \frac{9(9u_0 + 10v_0)}{10(9u_0 + 10v_0)} = \frac{9}{10}$$

vilket bevisar påståendet ovan.