INGENJÖRSHÖGSKOLAN
Matematik
Fredrik Abrahamsson

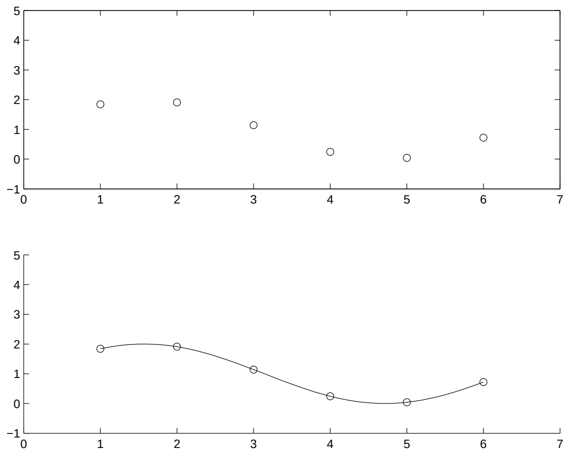
Designerkurvor

När en designer arbetar med ett CAD-program är en metod att ge som indata ett antal punkter, s.k. *definitionspunkter* och sedan låta programmet beräkna och rita ut en kurva som “anpassar sig” till dessa definitionspunkter. Om kurvan passerar genom punkterna så talar vi om en *interpolerande* kurva, och annars om en *approximerande* kurva. Problemet med att finna en interpolerande kurva kan enkelt formuleras som att givet definitionspunkterna

$$(x_1, y_1), \dots (x_n, y_n)$$

vill vi finna en kurva som passerar genom samtliga n punkter.

Detta är ett klassiskt problem som är lätt att lösa; t.ex. kan man alltid finna ett polynom av grad $n-1$ som interpolerar dessa punkter. I praktiska sammanhang är detta sällan gångbart eftersom om n är stort så kommer kurvan som bestäms av polynomet att kraftigt oscillera mellan definitionspunkterna. Istället använder man sig av en styckvis definierad kurva dvs. en kurva sammansatt av många delkurvor. Dessa delkurvor är vanligtvis polynom av relativt låg grad och varje delkurva interpolerar bara ett fåtal definitionspunkter.



Kubiska splines

Ordet *spline* är ett engelskt ord för ett rithjälpmedel som består av en tunn, flexibel träremsa. Den används som en typ av interpolerande linjal genom att fixera den med ett antal stöd i definitionspunkterna som gör det möjligt att rita en kurva som passerar genom dessa punkter. Vi vill nu skapa en matematisk motsvarighet till denna spline. Vi antar för enkelhets skull att interpolationspunkterna är jämnt fördelade i $x-$led , dvs. vi antar att

$$x_i - x_{i-1} = h, \quad i = 1, \dots, n.$$

Låt $y = S(x)$ vara den interpolerande kurva vi söker, definierad för $x \in [x_1, x_n]$. Vi vill att denna kurva skall beskriva splinelinjalens deformation, när definitionspunkterna är $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Om vi ser linjalen som en punktbelastad balk så får vi enligt hållfasthetslärans ekvationer villkoret att fjärde derivatan av $S(x)$ är noll mellan interpolationspunkterna, dvs.

$$S^{(4)}(x) = 0\,, \quad \text{för } x \in]x_i, x_{i-1}[, \quad i = 1, \dots, n$$

För små böjningar säger också denna hållfasthetslära att $S(x)$ måste ha två kontinuerliga derivator, dvs. $S(x)$, $S'(x)$ och $S''(x)$ måste vara kontinuerliga för $x \in [x_1, x_n]$. Det är det sista villkoret, att $S''(x)$ är kontinuerlig som gör att vi uppfattar kurvan som “jämn” dvs. vi uppfattar den som en hel kurva utan skarpa kanter någonstans. Matematiskt så säger man att kurvan har en kontinuerlig *krökning*. Detta är ett minikrav men det räcker långt eftersom vi klarar av att se diskontinuiteter i krökningen, dvs. i $S''(x)$, men diskontinuiteter i högre ordningens derivator märker vi inte med blotta ögat.

Eftersom $S^{(4)}(x) = 0$, i varje delintervall $]x_i, x_{i-1}[$ så finner vi efter fyra integrationer att $S(x)$ måste vara ett tredjegradspolynom på varje delintervall. Härifrån kommer alltså benämningen *kubiska splines* för sådana kurvor. Följaktligen kan vi skriva

$$S(x) = \begin{cases} S_1(x), & x_1 \leq x \leq x_2 \\ S_2(x), & x_2 \leq x \leq x_3 \\ \vdots & \\ S_{n-1}(x), & x_{n-1} \leq x \leq x_n \end{cases}$$

där $S_1(x)$, $S_2(x), \ldots, S_{n-1}(x)$ är kubiska polynom definierade på respektive delintervall.

Beräkning av koefficienterna

Om vi (för att förenkla de kommande beräkningarna) skriver de kubiska polynomen som

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \ , \quad i = 1, \ldots, n - 1$$

så har vi att bestämma de $4n - 4$ koefficienterna a_i, b_i, c_i, d_i för $i = 1, \ldots, n - 1$. Följande villkor måste vara uppfyllda.

1. $S(x)$ skall interpolera definitionspunkterna (x_i, y_i), $i = 1, \ldots, n$, dvs. $S(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, n$.
2. $S(x)$ är kontinuerlig på $[x_1, x_n]$, dvs. $S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i)$, $i = 2, \ldots, n - 1$.
3. $S'(x)$ är kontinuerlig på $[x_1, x_n]$, dvs. $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$, $i = 2, \ldots, n - 1$.
4. $S''(x)$ är kontinuerlig på $[x_1, x_n]$, dvs. $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$, $i = 2, \ldots, n - 1$.

Dessa totalt $4n-6$ villkor ger upphov till lika många ekvationer, alltså saknas det två ekvationer men vi återkommer till detta. Om man genomför beräkningarna så kan resultatet skrivas som

$$a_i = \tfrac{m_{i+1} - m_i}{6h}$$

$$b_i = \tfrac{m_i}{2}$$

$$c_i = \tfrac{y_{i+1} - y_i}{h} - \tfrac{(m_{i+1} + 2m_i)h}{6}$$

$$d_i = y_i$$

för $i = 1, \ldots, n - 1$. Här är $h = x_i - x_{i-1}$ och vi har uttryckt koefficienterna med hjälp av kvantiteterna $m_i = S''_i(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$ som entydigt bestämmer våra kubiska splines. Villkoren ovan ger upphov till följande ekvationer

$$\begin{cases} m_1 + 4m_2 + m_3 = 6(y_1 - 2y_2 + y_3)/h^2 \\ m_2 + 4m_3 + m_4 = 6(y_2 - 2y_3 + y_4)/h^2 \\ \vdots \\ m_{n-2} + 4m_{n-1} + m_n = 6(y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n)/h^2 \end{cases}$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem med $n - 2$ ekvationer och n obekanta. Precis som vi observerade tidigare så saknar vi två ekvationer för att entydigt bestämma de obekanta $m_1, \ldots, m_n$. Skälet är helt enkelt att det finns oändligt många kubiska splines som uppfyller kraven ovan. För att välja en av dessa möjliga splines måste vi tillföra villkor i ändpunkterna (x_1, y_1) och (x_n, y_n). Det finns många olika sätt att göra detta på, en vanlig variant är att man kräver att andraderivatorna i ändpunkterna är noll, dvs. vi sätter $m_1 = m_n = 0$. Detta resulterar då i det kvadratiska ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 \\ m_3 \\ \vdots \\ m_{n-2} \\ m_{n-1} \end{pmatrix} = \frac{6}{h^2} \begin{pmatrix} y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 \\ y_3 - 2y_4 + y_5 \\ \vdots \\ y_{n-4} - 2y_{n-3} + y_{n-2} \\ y_{n-3} - 2y_{n-2} + y_{n-1} \\ y_{n-2} - 2y_{n-1} + y_n \end{pmatrix}$$

nu skrivet på matrisform. (Fysikaliskt betyder villkoret $m_1 = m_n = 0$ att den elastiska linjalen fritt får fortsätta i räta linjer efter ändpunkterna).

Ögats känslighet

Låt oss ta ett exempel. I tabellen nedan har man vid ett experiment uppmätt ögats spektrala känslighet (i enheten lm/W) för ett antal olika våglängder. För vilken våglängd är ögats känslighet som störst?

Känslighet (lm/W)	198	649	587	226	82
Våglängd (nm)	500	540	580	620	660

Alltså är $(x_1, y_1) = (500, 198), \ldots, (x_5, y_5) = (660, 82)$ och $h = x_i - x_{i-1} = 40$. Med $m_1 = m_5 = 0$ fås enligt ovan ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 \\ m_3 \\ m_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.9237 \\ -1.1212 \\ 0.8137 \end{pmatrix}$$

Det följer att $m_2 = -0.4207$, $m_3 = -0.2411$ och $m_4 = 0.2637$ så att vi kan beräkna koefficienterna till polynomen med hjälp av uttrycken ovan. Vår kubiska spline blir

$$S(x) = \begin{cases} -0.0018(x-500)^3 + 14.08(x-500) + 198 & , \quad 500 \le x \le 540 \\ 0.0007(x-540)^3 - 0.2103(x-540)^2 + 5.666(x-540) + 649 & , \quad 540 \le x \le 600 \\ 0.0021(x-600)^3 - 0.1205(x-600)^2 - 7.569(x-600) + 587 & , \quad 600 \le x \le 640 \\ -0.0011(x-640)^3 + 0.1319(x-640)^2 - 7.116(x-640) + 226 & , \quad 640 \le x \le 680 \end{cases}$$

I figuren till höger plottas mätpunkterna och vår interpolerande kurva. Vi ser att det finns ett största värde i intervallet $[540, 600]$ och för att finna detta deriverar vi $S(x)$ och letar efter stationära punkter. Om $x \in [540, 600]$ så fås

$$S'(x) = 0.0021(x-540)^2 - 0.4206(x-540) + 5.666$$

Den rot till ekvationen $S'(x) = 0$ som ligger i det aktuella intervallet visar sig vara $x^* \approx 555$ nm. Ögats maximala ljuskänslighet uppnås alltså för våglängden 550 nm och då är känsligheten

$$S(x^*) \approx 689 \text{ lm/W}.$$