INGENJÖRSHÖGSKOLAN
Matematik
Fredrik Abrahamsson

Fibonaccital

Kaniner

Fibonaccis talföljd $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ definieras av det rekursiva sambandet

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \ , \ n \geq 2 \end{cases}$$

Fibonacci, (även känd som Leonardo från Pisa) verkade på 1200-talet och kan betraktas som en av Euoropas första riktiga matematiker efter den Grekiska eran. Fibonacci introducerade talföljden för att beskriva antalet kaninpar som finns efter n månader om man startar med ett ensamt kaninpar som efter två månaders ålder producerar ett nytt kaninpar varje månad. Vi antar att kaninerna aldrig dör samt att de efter två månader blir könsmogna och därefter producerar ett nytt par varje månad. Antalet kaninpar efter n månader är då f_n.
Detta problem är kanske inte speciellt realistiskt, men icke desto mindre så dyker fibonaccitalen upp i otroligt många sammangang. Ett exempel är t.ex. antalet fröspiraler i en solros - om man räknar antalet spiraler medurs och antalet spiraler moturs så är dessa tal alltid två konsekutiva fibonaccital. Detta fenomen uppträder i många andra fröspiraler i naturen, det visar sig att detta är ett optimalt sätt att packa många frön av samma storlek så att frötätheten blir konstant, dvs. inte trångt i mitten och glest i kanterna.
Även bladtillväxten på en planta är ofta relaterad till fibonaccitalen. Om man tittar ned på t.ex. en solros uppifrån så ser man ofta att bladen växer ut på ett sådant sätt att de inte skymmer varandra alltför mycket - alla blad vill ha ljus. Det visar sig att om man utgår från ett blad och räknar antalet varv medurs som krävs för att hitta ett blad rakt ovanför det första bladet (vi går från blad till blad) så är detta tal ett fibonaccital. Också antalet varv moturs som krävs för att nå nästa blad rakt över det första bladet är ett fibonaccital. Dessutom är antalet blad som man finner mellan de båda bladen - ja just det - ett fibonaccital. Slutligen, dessa tre fibonaccital är dessutom tre konsekutiva tal i fibonacciföljden!

Ytterligare en intressant egenskap hos fibonaccitalen är att

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

vilket är ett tal känt som *det gyllene snittet*. Det gyllene snittet $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ användes redan av de gamla grekerna; om en sträcka AB delas i en punkt C på ett sådant sätt att den större delen förhåller sig till den mindre delen på samma sätt som den hela sträckan förhåller sig till den större delen så gäller att denna kvot är just lika med det gyllene snittet (bevisa det!).

En explicit formel

Om man vill beräkna f_n för små n så fungerar den rekursiva definitionen ovan bra, men om n är stort så blir proceduren omständlig. Det vore bra om vi kunde finna en explicit formel $f_n = F(n)$ för någon funktion F. Med lite linjär algebra kan vi elegant lösa detta problem. Vi utgår från sambanden

$$\begin{cases} f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \\ f_{n-1} = f_{n-1} \end{cases}$$

Låt sedan

$$x_n = \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} \ , \ n = 1, 2, \ldots$$

Då kan vi skriva om sambanden ovan som matrisekvationen

$$x_n = Ax_{n-1} \ , \ n = 2, 3, \ldots$$

med

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Det följer att

$$x_{n+1} = Ax_n = A^2 x_{n-1} = \cdots = A^n x_1$$

där

$$x_1 = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Nu kan vi beräkna A^n genom att diagonalisera A; vi får $A = PDP^{-1}$ där

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ \sqrt{5}-1 & \sqrt{5}+1 \end{pmatrix} , \ D = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

och

$$P^{-1} = \frac{1}{4\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \sqrt{5}+1 & 2 \\ 1-\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix} .$$

Detta leder till att $x_n = A^n x_1 = PD^n P^{-1} x_1$ och man får slutligen den explicita formeln

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right) .$$

Vi kan nu också bevisa påståendet att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Med $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ och $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ får vi att

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \quad = \quad \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha^n - \beta^n} = \alpha \cdot \frac{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n} .$$

Eftersom

$$\left| \frac{\beta}{\alpha} \right| = \frac{|1-\sqrt{5}|}{1+\sqrt{5}} = \frac{|1-5|}{(1+\sqrt{5})^2} = \frac{4}{6+2\sqrt{5}} < 1$$

så följer att $(\beta/\alpha)^n \to 0$ då $n \to \infty$. Alltså kan vi konstatera att

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$