Lösningsförslag till KS3 den 12 oktober

1A. Bestäm värdet på parameter a så att vektorer i rummet $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

blir linjärt beroende.

Lösning. Vektorerna blir linjärt beroende om determinanten av matrisen av deras koordinater är lika med 0. Vi räknar

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = a + 1.$$

Alltså, vektorerna blir linjärt beroende om $a = -1$.

1B. Bestäm värdet på parameter a så att vektorer i rummet $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

blir linjärt beroende.

Lösning. Vektorerna blir linjärt beroende om determinanten av matrisen av deras koordinater är lika med 0. Vi räknar

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = a - 4.$$

Alltså, vektorerna blir linjärt beroende om $a = 4$.

2A. Bestäm inversmatris A^{-1} till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svar:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2B. Bestäm inversmatris A^{-1} till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Svar:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3A. Bestäm samtliga egenvärdena och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lösning. Karakteristiska ekvationen är

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

och den har rötter $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -1$ (egenvärdena).

För egenvärdet $\lambda_1 = 1$ får vi

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

vilket ger motsvarande egenvektor

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

(där t är ett godtyckligt tal).

För egenvärdet $\lambda_2 = -1$ får vi

$$A + I = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

vilket ger motsvarande egenvektor

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} s \\ 3s \end{pmatrix}$$

(där s är ett godtyckligt tal).

3B. Bestäm samtliga egenvärdena och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}.$$

Lösning. Karakteristiska ekvationen är

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 \\ -5 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0$$

och den har rötter $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = -1$ (egenvärdena).

För egenvärdet $\lambda_1 = 1$ får vi

$$A - I = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$$

vilket ger motsvarande egenvektor

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} t \\ -t \end{pmatrix}$$

(där t är ett godtyckligt tal).

För egenvärdet $\lambda_2 = -1$ får vi

$$A + I = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$$

vilket ger motsvarande egenvektor

$$\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} s \\ -5s/3 \end{pmatrix}$$

(där s är ett godtyckligt tal).