KTH Matematik

kontrollskrivning nr 3 i SF1624 för IT(CINTE1) & ME(CMIEL1)

26 november 2007, kl 10.15-11.15

Version vänster.

Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng. Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering

Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:

* Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat.

* OBS!! Rätten att klaga på kontrollskrivningarna upphör när skrivningen lämnar undervisningslokalen.

1. Bestäm samtliga egenvärdena och egenvektorerna till matrisen $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

2 . Skriv komplexa talet $\dfrac{\sqrt{2}}{2+i}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ på formen $a+ib$.

3. Använd t.ex kvadratkomplettering för att lösa $z^2 - (2 + 3i)z - 1 + 3i=0$

KTH Matematik

kontrollskrivning nr 3 i SF1624 för IT(CINTE1) & ME(CMIEL1)

26 november 2007, kl 10.15–11.15

Version höger.

Inga hjälpmedel

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering.

Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

prog	Efternamn	Förnamn	Personnr	Resultat

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:
* Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat.

* OBS!! Rätten att klaga på kontrollskrivningarna upphör när skrivningen lämnar undervisningslokalen.

1. Bestäm samtliga egenvärdena och egenvektorerna till matrisen $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

2 . Skriv komplexa talet $\dfrac{\sqrt{2}}{-2+i} e^{i\frac{\pi}{4}}$ på formen $a + ib$

3. Använd t.ex kvadratkomplettering för att lösa $z^2 - (3 + 2i)z - 1 + 3i = 0$

<u>Lösningsförslag till KS3</u>

Vänster

1. steg1 finn egenvärden till A

Vi har $\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}3-\lambda & 1\\ 1 & 3-\lambda\end{pmatrix}=(3-\lambda)^2-10 \Rightarrow \lambda = 2,4$

Steg2 Finn en normaliserad egenvektor till $\lambda=2$

$$(A-2i)\vec{f}_1=\vec{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}3-2 & 1\\ 1 & 3-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow x+y=0\Rightarrow x=-y=-t$$

Delsvar $\vec{f}_1=t\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$ eller $\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$

Steg3 Finn en normaliserad egenvektor till $\lambda=4$

$$(A-4I)\vec{f}_1=\vec{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}3-4 & 1\\ 1 & 3-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow x-y=0\Rightarrow x=y=t$$

Delsvar $\vec{f}_1=t\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ eller $\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

2. Vi har $\dfrac{\sqrt{2}}{2+i}e^{-i\frac{\pi}{4}}=$

$$=\frac{\sqrt{2}\left(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4)\right)}{2+i}=\frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{2+i}=$$

$$=\frac{1-i}{2+i}=\frac{(1-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{1-3i}{5}=\frac{1}{5}-i\frac{3}{5}$$

---

3. Man har $z^2-(2+3\mathrm{i})z-1+3\mathrm{i}=\left(z-1-\frac{3\mathrm{i}}{2}\right)^2-\left(1+\frac{3\mathrm{i}}{2}\right)^2-1+3\mathrm{i}=\left(z-1-\frac{3\mathrm{i}}{2}\right)^2=-\frac{9}{4}$

vilket

ger $z-1-\frac{3\mathrm{i}}{2}=\pm\frac{3i}{2}$ och

svar $z=1,1+3i$

Höger

1. 1. steg1 finn egenvärden till A

Vi har $\det(A-\lambda I)=\det\begin{pmatrix}4-\lambda & 1\\ 1 & 4-\lambda\end{pmatrix}=(4-\lambda)^2-1 \Longrightarrow \lambda=3,5$

Steg2 Finn en egenvektor till $\lambda=3$

$$(A-3I)\vec{f}_1=\vec{0}\Rightarrow\begin{pmatrix}4-3 & 1\\ 1 & 4-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow x+y=0\Rightarrow x=-y=-t$$

Delsvar $\vec{f}_1=t\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$ eller $\begin{pmatrix}-1\\ 1\end{pmatrix}$

Steg3 Finn en egenvektor till $\lambda = 5$

$$\left(A-5I\right)\vec{f}_1 = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4-5 & 1 \\ 1 & 4-5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x-y=0 \Rightarrow x=y=t$$

Delsvar $\vec{f}_1 = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eller $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Vi har $\dfrac{\sqrt{2}}{-2+i}e^{i\frac{\pi}{4}} =$

$$= \frac{\sqrt{2}\left(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)\right)}{-2+i} = \frac{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{-2+i} =$$

$$= \frac{1+i}{-2+i} = \frac{(1+i)(-2-i)}{(-2+i)(-2-i)} = \frac{-1-3i}{5} = -\frac{1}{5}-i\frac{3}{5}$$

---

3. Man har $z^2 - (3 + 2i)z - 1 + 3i$ =

$$= \left(z-\left(\frac{3+2i}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{3+2i}{2}\right)^2 - 1 + 3i =$$

$$\left(z-\left(\frac{3+2i}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{9}{4}+3i-1\right) - 1 + 3i = \left(z-\left(\frac{3+2i}{2}\right)\right)^2 - \frac{9}{4} = 0$$

vilket

ger $\left(z-\left(\frac{3+2i}{2}\right)\right)^2 - \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow z-\left(\frac{3+2i}{2}\right) = \pm\frac{3}{2}$ som ger z $z = i, 3+i$
