**KTH Matematik**

**kontrollskrivning nr 1 i SF1624 för IT(CINTE1) & ME(CMIEL1)**
**12 november 2007, kl 10.15-11.15**

**Version höger.**
**Inga hjälpmedel**

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng. Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering

Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

| prog | Efternamn | Förnamn | Personnr | Resultat |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:
* Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat.

1. Bestäm den vinkelräta projektionen av vektorn $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ på linjen L med ekvation (1,1,1) +t $\boldsymbol{r}$, där $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. En linjär avbildning A från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ överför vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ på vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ och vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ på vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$. Bestäm den 2x2- avbildningsmatrisen.

3. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} -x - y - 2z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

**KTH Matematik**

**kontrollskrivning nr 1 i SF1624 för IT(CINTE1) & ME(CMIEL1)**

**12 november 2007, kl 10.15-11.15**

**Version vänster.**

**Inga hjälpmedel**

Varje uppgift poängsättas med maximalt 3 poäng. För godkänt krävs minst 5 poäng av total 9 poäng.
Samtliga behandlade uppgifter ska förse med utförlig lösning och motivering.

Skrivningen skall lämnas tillbaka till din lektions lärare med dina lösningsförslag

| prog | Efternamn | Förnamn | Personnr | Resultat |
|---|---|---|---|---|
| | | | | |

När kontrollskrivningarna är rättade kan de återfås hos övningsläraren. Observera:
* Den som vill klaga över rättningen av sin skrivning skall skriva ner sina synpunkter (gärna kortfattat) och lämna klagoskriften + skrivningen till sin lärare för vidare befordran till den som har rättat.

1. Bestäm den vinkelräta projektionen av vektorn $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ på linjen L med med ekvation (1,1,1) +t $\boldsymbol{r}$, där $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2. En linjär avbildning A från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ överför vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ på vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ på vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestäm den 2x2-avbildningsmatrisen

3. Lös ekvationssystemet $\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -x - 2y + z = 3 \end{cases}$

**Lösningsförslag till KS1,**
**Höger**

1. Bestäm den vinkelräta projektionen av vektorn $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ på linjen L

med ekvation (1,1,1) +t $\boldsymbol{r}$ **,** där $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösning
Den vinkelräta projektionen av vektor $\boldsymbol{w}$ på vektorn $\boldsymbol{r}$ ges av

$$\text{proj}_{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}}{||\boldsymbol{r}||^2}\,\boldsymbol{r} \quad = \quad \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{8}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$ är parallell med vektorn **r.**

Svar: $\frac{8}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.En linjär avbildning A från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ överför vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ på vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ och vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ på vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$. Bestäm den 2x2- avbildningsmatrisen.

Lösning
Låt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vara avbildningsmatrisen. Vi har

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 2 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b = 2 \\ 2 + 2d = 8 \end{cases} \Rightarrow b = 1, d = 3$$

Svar $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

---

3.

$\begin{cases} -x - y - 2z = 1 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ Ekvationssystemet säger att vi söker om möjligt skärningen mellan två plan.

Om dessa plan skär varandra så måste deras skärning ges av en rätt linje dvs en parameter lösning. Alla punkter som ligger på den rätta linjen är en lösning till systemet. . Matrisen av systemet ger $\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Sista ekvationen ger $-2y - z = 1 \Rightarrow z = 1 - 2y$. Vi sätter $y = t$, där $t$ är en parameter ( ett godtyckligt tal). Från den första ekvationen fås

$-x = y + 2z + 1 \Rightarrow x = -y - 2z - 1 = (z = 1 - 2y, y = t) \Rightarrow x = 3t - 3$

Svar: $x = 3t - 3), y = t, z = 1 - 2t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

## Vänster

1. Bestäm den vinkelräta projektionen av vektorn $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ på linjen L med med ekvation (1,1,1)

+t $\boldsymbol{r}$, där $\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösning

Den vinkelräta projektionen av vektor $\boldsymbol{w}$ på vektorn $\boldsymbol{r}$ ges av

$$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{w} = \frac{\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{r}}{\|\boldsymbol{r}\|^2}\,\boldsymbol{r} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{8}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$ är parallell med vektorn $\boldsymbol{r}$.

Svar: $\frac{8}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. En linjär avbildning A från $\mathbb{R}^2$ till $\mathbb{R}^2$ överför vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ på vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ och vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ på vektor $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$. Bestäm den 2x2-avbildningsmatrisen

Lösning

Låt $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vara avbildningsmatrisen. Vi har

$$A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ d = 0 \end{cases}$$

$$A\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 2 = 5 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 3, c = 2$$

Svar $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

---

3

$\begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ -x - 2y + z = 3 \end{cases}$ Ekvationssystemet säger att vi söker om möjligt skärningen mellan två plan.

Om dessa plan skär varandra så måste deras skärning ges av en rätt linje dvs en parameter lösning. Alla punkter som ligger på den rätta linjen är en lösning till systemet. . Matrisen av systemet ger $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

Sista ekvationen ger $-3y + 3z = 3 \Rightarrow z = 1 + y$. Vi sätter $y = t$, där $t$ är en parameter ( ett godtyckligt tal). Från den första ekvationen fås

$x = y - 2z = (z = 1 + y, y = t) \Rightarrow x = t - 2(1 + t) = -2 - t$

Svar: $x = -2 - t, y = t, z = 1 + t \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$