**1.** Beräkna $(2-3i)(1+2i)^2$, $(\sqrt{2}+i)-i\sqrt{2}(1+i\sqrt{2})$ och $(1-2i)^2-(1+2i)^2$.

När vi räknar med komplexa tal använder vi de vanliga räknereglerna samt $i^2=-1$.

$$\begin{aligned}
(2-3i)(1+2i)^2 &= (2-3i)\big(1^2+2\cdot 1\cdot 2i+(2i)^2\big)\\
&= (2-3i)(-3+4i)\\
&= 2\cdot(-3)+2\cdot 4i-3i\cdot(-3)-3i\cdot 4i\\
&= -6+8i+9i+12\\
&= 6+17i\\
(\sqrt{2}+i)-i\sqrt{2}(1+i\sqrt{2}) &= \sqrt{2}+i-i\sqrt{2}-i\sqrt{2}\cdot i\sqrt{2}\\
&= 2+\sqrt{2}-i(\sqrt{2}-1)\\
(1-2i)^2-(1+2i)^2 &= \{\text{konjugeringsregeln: } a^2-b^2=(a+b)(a-b)\\
&\qquad \text{med } a=1-2i \text{ och } b=1+2i\}\\
&= 2\cdot(-4i)=-8i
\end{aligned}$$

**2.** Beräkna $|z|$ och $\bar{z}$ för $z=-2-3i$, $z=-4$, $z=2i$ och $z=4+2i$.

Med $z=x+iy$ är $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ och $\bar{z}=x-iy$.

$$\begin{aligned}
z=-2-3i: &\quad |z|=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}\\
&\quad \bar{z}\ =-2+3i\\
z=-4: &\quad |z|=\sqrt{(-4)^2+0^2}=\sqrt{16}=4\\
&\quad \bar{z}\ =-4\\
z=2i: &\quad |z|=\sqrt{0^2+2^2}=\sqrt{4}=2\\
&\quad \bar{z}\ =-2i\\
z=4+2i: &\quad |z|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}\\
&\quad \bar{z}\ =4-2i
\end{aligned}$$

**3.** Skriv följande uttryck i formen $a+ib$

$$\frac{i}{1+i},\quad \frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)(\sqrt{3}-i)}\quad \text{och}\quad \frac{1-2i}{3+4i}-\frac{2+i}{5i}.$$

För att skriva en kvot mellan två komplexa tal i kartesisk form (d.v.s. $a+ib$) förlänger man med nämnarens konjugat.

$$\begin{aligned}
\frac{i}{1+i} &= \frac{i}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i}=\frac{i-i^2}{|1+i|^2}\\
&= \frac{1+i}{2}=1/2+i/2\\
\frac{\sqrt{3}+i}{(1-i)(\sqrt{3}-i)} &= \frac{(\sqrt{3}+i)(1+i)(\sqrt{3}+i)}{(1-i)(1+i)(\sqrt{3}-i)(\sqrt{3}+i)}\\
&= \frac{\big(\sqrt{3}+i\sqrt{3}+i+i^2\big)(\sqrt{3}+i)}{|1-i|^2\,|\sqrt{3}-i|^2}\\
&= \frac{\big(\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)\big)(\sqrt{3}+i)}{2\cdot 4}\\
&= \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{3}+(\sqrt{3}-1)i+i(\sqrt{3}+1)\sqrt{3}-(\sqrt{3}+1)}{8}\\
&= -\frac{2(\sqrt{3}-1)}{8}+i\frac{2(\sqrt{3}+1)}{8}\\
\frac{1-2i}{3+4i}-\frac{2+i}{5i} &= \frac{(1-2i)(3-4i)}{|3+4i|^2}-\frac{(2+i)(-5i)}{|5i|^2}\\
&= \frac{3-4i-6i-8}{25}-\frac{-10i+5}{25}\\
&= -\frac{5}{25}-\frac{10}{25}i-\frac{5}{25}+\frac{10}{25}i\\
&= -\frac{10}{25}=-\frac{2}{5}
\end{aligned}$$

**4.** Visa med induktion att

a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) summan av de $n$ första udda naturliga talen är $n^2$.

c) $2^n + 3^n < 4^n$ för $n = 2, 3, 4, \ldots$

a) Först skriver vi om summan med $\sum$-symbolen. Vi indexerar summan.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & n-1 & & n \quad \xrightarrow{\phantom{xx}} k \\ 1 & + & 2 & + & 3 & +\cdots+ & (n-1) & + & n \end{array}$$

I detta fall ser vi direkt att summanden är $f(k) = k$. Summan blir alltså

$$\sum_{k=1}^{n} k.$$

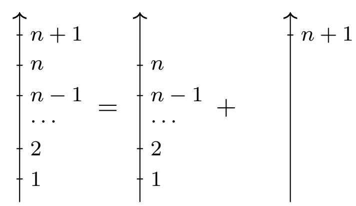
Låt $P_n$ vara påståendet

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1 $P_1$ är sann, ty $\langle \text{VL av } P_1 \rangle = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = \langle \text{HL av } P_1 \rangle$.

2 Påstående: $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

$$\langle \text{VL av } P_{n+1} \rangle = \sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1)$$



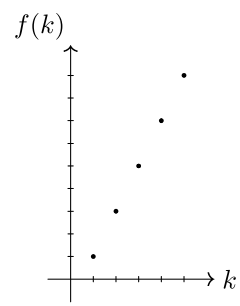

$$= \{P_n \text{ är sann}\}$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \langle \text{HL av } P_{n+1} \rangle$$

3 Av induktionsaxiomet följer att $P_n$ är sann för alla positiva heltal $n$.

b) Vi indexerar först summan

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & \cdots \quad \xrightarrow{\phantom{xx}} k \\ 1 & + & 3 & + & 5 & + & 7 & + & 9 & + \cdots \end{array}$$

Hur ser summanden $f$ ut?




$f(k) = 2k - 1$

Eftersom vi ska summera de $n$ första udda talen ska $k$ gå från 1 till $n$. Summan blir

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1).$$

Låt $P_n$ vara påståendet

$$\sum_{k=1}^{n} (2k - 1) = n^2.$$

1 $P_1$ är sann, ty $\langle \text{VL av } P_1 \rangle = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2 = \langle \text{HL av } P_1 \rangle$.

② Påstående: $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

$$\langle \text{VL av } P_{n+1} \rangle = \sum_{k=1}^{n+1}(2k-1) = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) + \big(2(n+1)-1\big)$$

$$\begin{array}{ccccc} n+1 & & & & n+1 \\ n & & n & & \\ n-1 & = & n-1 & + & \\ \cdots & & \cdots & & \\ 2 & & 2 & & \\ 1 & & 1 & & \end{array}$$

$$= \{P_n \text{ är sann}\}$$
$$= n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 = \langle \text{HL av } P_{n+1} \rangle$$

③ Av induktionsaxiomet följer att $P_n$ är sann för alla heltal $n \geq 1$.

c) Låt $P_n$ vara påståendet

$$2^n + 3^n < 4^n.$$

① $P_2$ är sann, ty $\langle \text{VL av } P_2 \rangle = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13 < 16 = 4^2 = \langle \text{HL av } P_2 \rangle$.

② Påstående: $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

$$\begin{aligned} \langle \text{VL av } P_{n+1} \rangle &= 2^{n+1} + 3^{n+1} = 2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n < 3 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n \\ &= 3 \cdot (2^n + 3^n) < \{P_n \text{ är sann}\} < 3 \cdot 4^n \\ &< 4 \cdot 4^n = 4^{n+1} = \langle \text{HL av } P_{n+1} \rangle \end{aligned}$$

③ Av induktionsaxiomet följer att $P_n$ är sann för alla heltal $n \geq 2$.

**5.** Lös ekvationerna

a) $z^4 + 2iz^2 + 3 = 0$

b) $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$

c) $z^6 - 2iz^3 - 4 = 0$

a) Ekvationen är en förklädd 2:a gradsekvation. Med $w = z^2$ fås

$$w^2 + 2iw + 3 = 0.$$

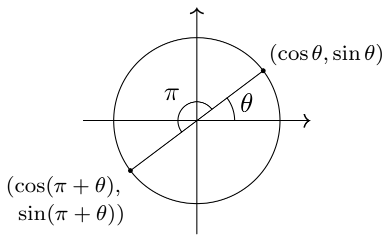
Kvadratkomplettering ger

$$\begin{aligned} &(w+i)^2 - i^2 + 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (w+i)^2 = -4 \\ &\Leftrightarrow \quad w = -i \pm 2i = \begin{cases} i \\ -3i \end{cases} = \begin{cases} \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \\ 3\big(\cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2})\big) \end{cases} \end{aligned}$$

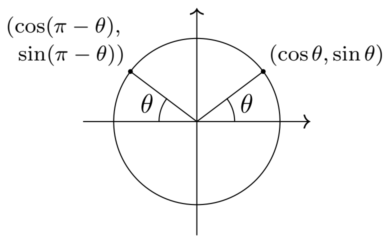
och

$$z = \sqrt{w} = \begin{cases} \cos(\frac{\pi}{4} + n\pi) + i\sin(\frac{\pi}{4} + n\pi) & n = 0,1 \\ \sqrt{3}\big(\cos(-\frac{\pi}{4} + k\pi) + i\sin(-\frac{\pi}{4} + k\pi)\big) & k = 0,1 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} +\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) \\ +\sqrt{\frac{3}{2}}(1-i) \\ -\sqrt{\frac{3}{2}}(1-i) \end{cases}$$

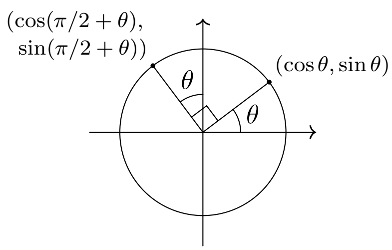
*anm.* Ett hjälpmedel när man ska bestämma cos- och sin-värden för argument som inte ligger i första kvadranten är enhetscirkeln. Symmetrier i cirkeln ger många formler.




$$\cos(\pi+\theta) = -\cos\theta$$
$$\sin(\pi+\theta) = -\sin\theta$$




$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$$
$$\sin(\pi-\theta) = +\sin\theta$$




$$\cos(\pi/2+\theta) = -\sin\theta$$
$$\sin(\pi/2+\theta) = +\cos\theta$$

b) Sätt $w = z^4$. Vi får

$$w^2 - 17w + 16 = 0.$$

Kvadratkomplettera!

$$(w - 17/2)^2 - (17/2)^2 + 16 = 0 \quad \Leftrightarrow$$
$$w = \frac{17}{2} \pm \sqrt{\frac{289}{4} - \frac{64}{4}} = \frac{17}{2} \pm \frac{15}{2} = \begin{cases} 1 \\ 16 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} \cos 0 + i \sin 0 \\ 16(\cos 0 + i \sin 0) \end{cases}$$

och

$$z = \sqrt[4]{w} = \begin{cases} \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2} & n = 0,1,2,3 \\ 2\big(\cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}\big) & k = 0,1,2,3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} n = 0: &\quad z = 1 \\ n = 1: &\quad z = i \\ n = 2: &\quad z = -1 \\ n = 3: &\quad z = -i \\ k = 0: &\quad z = 2 \\ k = 1: &\quad z = 2i \\ k = 2: &\quad z = -2 \\ k = 3: &\quad z = -2i. \end{aligned}$$

c) Sätt $w = z^3$. Vi får

$$w^2 - 2iw - 4 = 0.$$

Kvadratkomplettera!

$$(w-i)^2 - i^2 - 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w_\pm = i \pm \sqrt{3}.$$

Vi uttrycker $w_\pm$ i polär form

$$|w_\pm| = \sqrt{1^2 + (\pm\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$$
$$\arg w_+ = \arctan\tfrac{1}{\sqrt{3}} = \pi/6$$
$$\arg w_- = \pi - \arctan\tfrac{1}{\sqrt{3}} = 5\pi/6$$

$$w_+ = 2(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6})$$
$$w_- = 2(\cos\tfrac{5\pi}{6} + i\sin\tfrac{5\pi}{6}).$$

Vi får

$$z = \sqrt[3]{w_\pm} = \begin{cases} \sqrt[3]{2}\big(\cos(\frac{\pi}{18} + \frac{2n\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{18} + \frac{2n\pi}{3})\big) & n = 0,1,2 \\ \sqrt[3]{2}\big(\cos(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}) + i\sin(\frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3})\big) & k = 0,1,2 \end{cases}.$$

**6.** Bestäm de reella tal $a$ och $b$ så att ekvationen $z^3 + az + b = 0$ får roten $z = 1 - 2i$.

Om ekvationen ska ha reella koefficienter ska även $1 + 2i$ vara en rot. Faktorsatsen ger att $\big(z - (1 - 2i)\big)\big(z - (1 + 2i)\big) = z^2 - 2z + 5$ måste vara en faktor i polynomet. Ansätt därför

$$\begin{aligned} z^3 + az + b &= (z^2 - 2z + 5)(z - A) \\ &= z^3 + (-A - 2)z^2 + (2A + 5)z - 5A. \end{aligned}$$

Identifikation av koefficienter ger

$$\begin{cases} 0 = -A - 2 \\ a = 2A + 5 \\ b = -5A \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A = -2 \\ a = 1 \\ b = 10. \end{cases}$$