Avsnitt 6, Egenvärden och egenvektorer

W501 Vilka av följande matriser är ortogonala?

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

En matris

$$A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

är en ortogonal matris om dess kolumner bildar en ON-bas för rummet, d.v.s. om

- kolumnvektorerna har längd 1,
$$\|\boldsymbol{a}_i\|^2 = \boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_i = 1 \quad \text{för } i = 1, 2, \ldots, n, \text{ och}$$
- kolumnvektorerna är sinsemellan ortogonala (vinkelräta),
$$\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = 0 \quad \text{för } i \neq j.$$

Dessa villkor kan sammanfattas med följande matrismultiplikationsvillkor

$$A^tA = \begin{pmatrix} \text{——} & \boldsymbol{a}_1 & \text{——} \\ \text{——} & \boldsymbol{a}_2 & \text{——} \\ & \vdots & \\ \text{——} & \boldsymbol{a}_n & \text{——} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{a}_n \\ \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_2 \cdot \boldsymbol{a}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{a}_2 & \cdots & \boldsymbol{a}_n \cdot \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Vi undersöker alltså om matrisen uppfyller $A^tA = E$. Notera att matrisen A^tA alltid blir symmetrisk ($\boldsymbol{a}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}_j \cdot \boldsymbol{a}_i$) så vi behöver bara räkna ut ena triangelhalvan av matrisprodukten.

b) Vi får

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \neq E.$$

Redan första produktelementet avslöjar att matrisen inte är en ortogonal matris.

d) Vi får

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Alltså är matrisen en ortogonal matris.

W502c Bestäm de ingående parametrarna så att matrisen

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & x \\ y & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

blir ortogonal.

Villkoret för att en matris A är ortogonal är $A^tA = E$. I vårt fall blir produkten i vänsterledet

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & y \\ x & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & x \\ y & \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{25} + y^2 & \frac{3}{5}(-x+y) \\ & \frac{9}{25} + x^2 \end{pmatrix}.$$

Denna produkt är lika med enhetsmatrisen om

$$\frac{9}{25} + y^2 = 1, \quad \frac{3}{5}(-x+y) = 0, \quad \frac{9}{25} + x^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x = y = \pm\frac{4}{5}.$$

W503 Beräkna inverserna till matriserna

a) $\begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

a) Eftersom matrisen är 2×2 har vi en minnesregel för inversen: 1 delat med determinanten framför matrisen, diagonalelementen byter plats och de andra två elementen byter tecken. Alltså,

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\frac{5}{13}\cdot\frac{5}{13} - \frac{12}{13}\cdot\left(-\frac{12}{13}\right)} \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{12}{13} \\ \frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}.$$

d) I uppgift 501d visade vi att matrisen är ortogonal. För en ortogonal matris A gäller att

$$A^tA = AA^t = E$$

så inversmatrisen till A är A^t. För vår matris gäller alltså

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

W505c Bestäm parametrarna så att matrisen

$$\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & x \\ y & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

blir ortogonal med determinant $+1$.

I uppgift 502c visade vi att matrisen är ortogonal om

$$x = y = +\tfrac{4}{5} \quad \text{eller} \quad x = y = -\tfrac{4}{5}.$$

För dessa två fall blir determinanten

$$x = y = +\tfrac{4}{5}\colon \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = \left(-\tfrac{3}{5}\right)\cdot\tfrac{3}{5} - \tfrac{4}{5}\cdot\tfrac{4}{5} = -1,$$

$$x = y = -\tfrac{4}{5}\colon \begin{vmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{vmatrix} = \left(-\tfrac{3}{5}\right)\cdot\tfrac{3}{5} - \left(-\tfrac{4}{5}\right)\cdot\left(-\tfrac{4}{5}\right) = -1.$$

Inga parametervärden ger alltså determinant $+1$.

Anm. Determinant $+1$ svarar mot att kolumnvektorerna bildar en högerhänt ON-bas, medan determinant -1 svarar mot en vänsterhänt ON-bas.

W517 Bestäm alla egenvärden och motsvarande normerade egenvektorer till följande matriser

b) $\begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Det egenrum till matrisen A som svarar mot egenvärdet λ består av alla vektorer $\boldsymbol{x}$ som uppfyller

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}.$$

Egenvärdena till matrisen A får vi som rötter till sekularekvationen

$$\det(A - \lambda E) = 0.$$

Lösningsgången blir alltså:

1. Bestäm egenvärdena till A med sekularekvationen.
2. För varje egenvärde λ bestämmer vi motsvarande egenrum genom att lösa ekvationen $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$.

Vi löser nu deluppgifterna.

b) Med $A = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$ blir sekularekvationen

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -12 \\ 1 & -5-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-5-\lambda) - (-12)\cdot 1$$

$$= \lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = -2 \quad \text{eller} \quad \lambda = -1.$$

Egenvärdena är alltså $\lambda = -2$ och $\lambda = -1$.

Vi bestämmer nu egenrummen som hör till respektive egenvärde.

$\lambda = -2$: Egenrummet består av alla vektorer $\boldsymbol{x}$ som uppfyller ekvationen $\big(A - (-2)E\big)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Skriver vi detta ekvationssystem med ett räkneschema fås

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -12 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

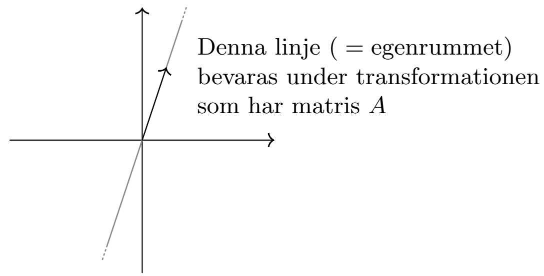
Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -12 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -4 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Lösningen är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}).$$

Egenrummet består alltså av linjen med riktning $(3, 1)$ som går genom origo.



Alla vektorer i egenrummet kallas för egenvektorer, och det finns två egenvektorer med längd 1,

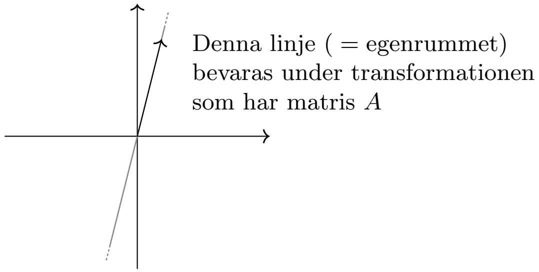
$$\pm\frac{(3,1)}{\|(3,1)\|} = \pm\frac{(3,1)}{\sqrt{3^2+1^2}} = \pm\big(\tfrac{3}{\sqrt{10}}, \tfrac{1}{\sqrt{10}}\big).$$

$\lambda = -1$: Vi får egenrummet som alla vektorer $\boldsymbol{x}$ som uppfyller ekvationen $\big(A - (-1)E\big)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Vi gausseliminerar

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -12 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ -3 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Lösningen är parameterlinjen

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}).$$



Normerade egenvektorer är

$$\pm\frac{(4,1)}{\|(4,1)\|} = \pm\frac{(4,1)}{\sqrt{4^2+1^2}} = \pm\left(\tfrac{4}{\sqrt{17}}, \tfrac{1}{\sqrt{17}}\right).$$

Svaret är alltså att egenvärdena är -2 och -1 med motsvarande normerade egenvektorer $\pm\left(\tfrac{3}{\sqrt{10}}, \tfrac{1}{\sqrt{10}}\right)$ respektive $\pm\left(\tfrac{4}{\sqrt{17}}, \tfrac{1}{\sqrt{17}}\right)$.

d) Sekularekvationen blir

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(4-\lambda) - 3$$

$$= \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = 1 \quad \text{eller} \quad \lambda = 5.$$

Vi bestämmer nu egenrummen som svarar mot egenvärdena.

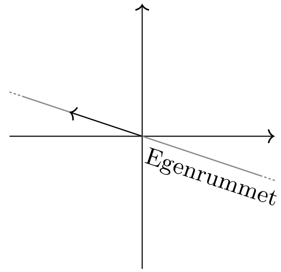
$\lambda = 1$: Egenrummet ges av alla lösningar till ekvationssystemet $(A - 1E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Vi gausseliminerar,

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} - \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

och lösningen är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}).$$



De normerade egenvektorerna är

$$\pm\frac{(-3,1)}{\|(-3,1)\|} = \pm\frac{(-3,1)}{\sqrt{(-3)^2+1^2}} = \pm\left(\tfrac{-3}{\sqrt{10}}, \tfrac{1}{\sqrt{10}}\right).$$

$\lambda = 5$: Egenvektorerna är lösningar till $(A - 5E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$,

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ 3 \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

d.v.s. egenvektorer är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}).$$

Normerade egenvektorer är

$$\pm\frac{(1,1)}{\|(1,1)\|} = \pm\frac{(1,1)}{\sqrt{1^2+1^2}} = \pm\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

W518 Bestäm alla egenvärden och motsvarande normerade egenvektorer till följande matriser

b) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -4 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ -6 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

b) Egenvärdena är rötter till sekularekvationen,

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -\lambda & -3 & 5 \\ -4 & 4-\lambda & -10 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= \{\,\text{Kofaktorutveckling längs rad 3}\,\} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (4-\lambda)\big(-\lambda(4-\lambda)-12\big) = (4-\lambda)\big(\lambda^2-4\lambda-12\big) = 0$$

$$\Leftrightarrow \qquad \lambda=-2, \quad \lambda=4 \quad \text{eller} \quad \lambda=6.$$

Till varje egenvärde finns ett egenrum.

$\lambda = -2$: Egenvektorerna är lösningar till $\big(A-(-2)E\big)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 5 & 0 \\ -4 & 6 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2 \;\; \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{6} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{5}{2} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är därmed

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

$\lambda = 4$: Egenvektorerna är lösningar till $(A-4E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & -3 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} - \;\; -\frac{1}{4} \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 3 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{4} \;\; \frac{1}{3} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är därför

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5t \\ 10t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}).$$

$\lambda = 6$: Egenvektorerna är lösningar till $(A-6E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -6 & -3 & 5 & 0 \\ -4 & -2 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \;\; -\frac{1}{6} \\ \\ -\frac{1}{2} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{40}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \frac{40}{3} \;\; \frac{5}{6} \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är därför

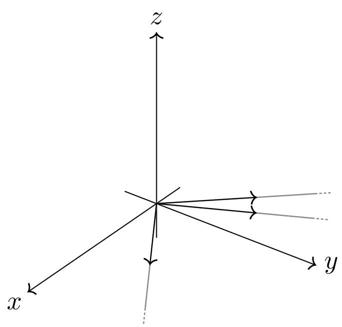
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}).$$

De normerade egenvektorerna är

$$\lambda = -2: \quad \pm\frac{(3,2,0)}{\|(3,2,0)\|} = \pm\frac{(3,2,0)}{\sqrt{3^2+2^2+0^2}} = \pm\big(\tfrac{3}{\sqrt{13}}, \tfrac{2}{\sqrt{13}}, 0\big),$$

$$\lambda = 4: \quad \pm\frac{(-5,10,2)}{\|(-5,10,2)\|} = \pm\frac{(-5,10,2)}{\sqrt{(-5)^2+10^2+2^2}} = \pm\tfrac{1}{\sqrt{129}}\big(-5,10,2\big),$$

$$\lambda = 6: \quad \pm\frac{(-1,2,0)}{\|(-1,2,0)\|} = \pm\frac{(-1,2,0)}{\sqrt{(-1)^2+2^2+0^2}} = \pm\big(-\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}, 0\big).$$



d) Egenvärdena ges av sekularekvationen,

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ -2 & 5-\lambda & -2 \\ -6 & 6 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27 = 0.$$

Förslagsvis löser vi ekvationen genom att gissa heltalsrötter. Eftersom polynomekvationen har heltalskoefficienter och den ledande termen har koefficient 1 så måste eventuella heltalsrötter dela konstanttermen 27, d.v.s. de enda möjliga heltalsrötterna är ± 1, ± 3, ± 9, ± 27. Av dessa visar sig -3 och $+3$ vara rötter. Enligt faktorsatsen kan sekularekvationen då skrivas

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - 9\lambda + 27 = (\lambda+3)(\lambda-3)(\lambda-A),$$

där A är den tredje roten. Stoppar vi in $\lambda = 0$ i sambandet fås

$$27 = 3\cdot(-3)\cdot(-A) \qquad \Leftrightarrow \qquad A = 3.$$

Egenvärdena är alltså $\lambda = -3$ och $\lambda = 3$ (dubbelrot).

Vi bestämmer nu egenvektorerna till respektive egenvärde.

$\lambda = -3$: Egenvektorerna är lösningar till $\big(A-(-3)E\big)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 8 & -2 & 0 \\ -6 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{4} \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 9 & -3 & 0 \\ 0 & 9 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} - & \frac{1}{9} \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} -\frac{1}{2} \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är därför

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ 3t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

$\lambda = 3$: Egenvektorerna är lösningar till $(A-3E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Gausseliminering ger

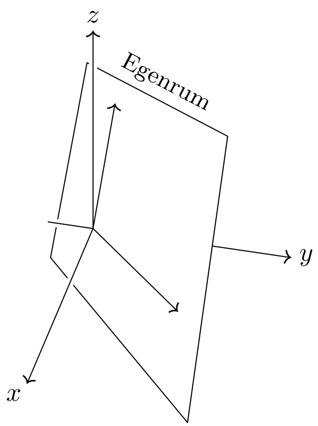
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ -6 & 6 & -6 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} - \quad -3 \quad -\tfrac{1}{2} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är därför

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s-t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (s,\, t \text{ parametrar}).$$

Egenrummet är alltså ett plan som spänns upp av $(1,1,0)$ och $(-1,0,1)$.



Normerade egenvektorer är

$$\lambda = -3: \quad \pm\frac{(1,1,3)}{\|(1,1,3)\|} = \pm\frac{(1,1,3)}{\sqrt{1^2+1^2+3^2}} = \pm\big(\tfrac{1}{\sqrt{11}}, \tfrac{1}{\sqrt{11}}, \tfrac{3}{\sqrt{11}}\big),$$

$$\lambda = 3: \quad \pm\frac{(1,1,0)}{\|(1,1,0)\|} = \pm\frac{(1,1,0)}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}} = \pm\big(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\big),$$

$$\pm\frac{(-1,0,1)}{\|(-1,0,1)\|} = \pm\frac{(-1,0,1)}{\sqrt{(-1)^2+0^2+1^2}} = \pm\big(-\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\big).$$

W519

c) Bevisa att om λ är ett egenvärde till matrisen A, så är $\lambda+\mu$ ett egenvärde till matrisen $A+\mu E$, där E är enhetsmatrisen av samma typ som A.

d) Bevisa att om λ är ett egenvärde till matrisen A, så är λ^2 ett egenvärde till matrisen A^2.

c) Eftersom λ är ett egenvärde till matrisen A så finns en vektor $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ så att

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}.$$

Då gäller att matrisen $A+\mu E$ uppfyller

$$(A+\mu E)\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + \mu\, E\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x} = (\lambda+\mu)\boldsymbol{x}.$$

Alltså har $A+\mu\, E$ egenvärdet $\lambda+\mu$, med samma egenvektor $\boldsymbol{x}$.

d) Om egenvärdet λ har egenvektorn $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$, d.v.s.

$$A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x},$$

då är

$$A^2\boldsymbol{x} = AA\boldsymbol{x} = A\lambda\boldsymbol{x} = \lambda\, A\boldsymbol{x} = \lambda\lambda\boldsymbol{x} = \lambda^2\boldsymbol{x}.$$

vilket visar att A^2 har egenvärdet λ^2.

W521 Bestäm egenvärdena och två ortogonala och normerade egenvektorer till följande matriser

b) $\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 17 \end{pmatrix}$.

Vi bestämmer egenvärden och egenvektorer på det vanliga sättet.

b) Egenvärdena ges av sekularekvationen

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda)(1-\lambda) - 2\cdot 2 \\ &= \lambda^2+\lambda-6=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda=-3 \quad \text{eller} \quad \lambda = 2. \end{aligned}$$

Egenvärdena är alltså $\lambda=-3$ och $\lambda=2$.

Vi bestämmer nu motsvarande egenvektorer.

$\lambda=-3$: Egenvektorerna är lösningar till $\bigl(A-(-3)E\bigr)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right) -2 \quad \sim \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är därför

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}).$$

$\lambda=2$: Egenvektorerna är lösningar till $\bigl(A-2E\bigr)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. Gausselimination ger

$$\left(\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) 2 \ \tfrac{1}{2} \quad \sim \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är därför

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}).$$

Eftersom matrisen är symmetrisk ger spektralsatsen att egenrummen är ortogonala, så för att bestämma två ortogonala och normerade egenvektorer räcker det att vi väljer en normerad vektor ur varje egenrum,

$$\frac{(-2,1)}{\|(-2,1)\|} = \bigl(-\tfrac{2}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\bigr) \quad \text{och} \quad \frac{(1,2)}{\|(1,2)\|} = \bigl(\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\bigr).$$

d) Sekularekvationen blir

$$\begin{aligned} \det(A-\lambda E) &= \begin{vmatrix} 8-\lambda & -6 \\ -6 & 17-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(17-\lambda) - (-6)\cdot(-6) \\ &= \lambda^2-25\lambda+100=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda=5 \quad \text{eller} \quad \lambda = 20. \end{aligned}$$

Vi har alltså egenvärdena $\lambda=5$ och $\lambda=20$.

Vi bestämmer motsvarande egenvektorer.

$\lambda=5$: Egenvektorerna är lösningar till $(A-5E)\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -6 & 0 \\ -6 & 12 & 0 \end{array}\right) 2 \ \tfrac{1}{3} \quad \sim \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är därför

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

$\lambda = 20$: Egenvektorerna är lösningar till $(A - 20E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\left[\begin{array}{cc|c} -12 & -6 & 0 \\ -6 & -3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -2 \quad -\tfrac{1}{6} \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Egenvektorerna är alltså

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

Vi har även i detta fall en symmetrisk matris, så spektralsatsen ger att egenvektorer från olika egenrum är ortogonala. Vi behöver alltså bara välja en normerad egenvektor ur respektive rum så är de ortogonala,

$$\frac{(2,1)}{\|(2,1)\|} = \left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{och} \quad \frac{(-1,2)}{\|(-1,2)\|} = \left(-\tfrac{1}{\sqrt{5}}, \tfrac{2}{\sqrt{5}}\right).$$

W522 Bestäm egenvärdena och tre parvis ortogonala och normerade egenvektorer till följande matriser

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,

d) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Egenvärdena ges av sekularekvationen

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \cdots$$
$$\cdots = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0.$$

Gissning ger rötterna $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$ och $\lambda_3 = 5$. Till varje egenvärde finns motsvarande egenrum.

$\lambda = -1$: Egenvektorerna är lösningar till $\big(A - (-1)E\big)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} - \quad \tfrac{1}{2} \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ 2 \quad - \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Egenvektorerna är därför

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

$\lambda = 2$: Egenvektorerna är lösningar till $(A-2E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} ②\ ⊖ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4} \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är därför

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

$\lambda = 5$: Egenvektorerna är lösningar till $(A-5E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \frac{1}{2}\ -\frac{1}{4} \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ ⊖\ -\frac{1}{4}\ -\frac{1}{2} \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är därför

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

Eftersom matrisen är symmetrisk ger spektralsatsen att egenrummen är ortogonala, så för att bestämma tre ortogonala normerade egenvektorer räcker det att välja en normerad vektor från respektive egenrum,

$$\frac{(-2,2,1)}{\|(-2,2,1)\|} = \left(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right), \qquad \frac{(2,1,2)}{\|(2,1,2)\|} = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right) \qquad \text{och}$$
$$\frac{(-1,-2,2)}{\|(-1,-2,2)\|} = \left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right).$$

d) Vi bestämmer egenvärdena med sekularekvationen

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & -1-\lambda & 4 \\ -2 & 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots$$
$$\cdots = -\lambda^3 + 27\lambda - 54 = 0.$$

Gissning ger rötterna $\lambda = -6$ och $\lambda = 3$, och enligt faktorsatsen kan polynomet då skrivas som

$$-\lambda^3 + 27\lambda - 54 = -(\lambda+6)(\lambda-3)(\lambda-A),$$

där A är den tredje roten. Stoppar vi in $\lambda = 0$ i sambandet fås

$$-54 = -6 \cdot (-3) \cdot (-A) \qquad \Leftrightarrow \qquad A = 3.$$

Egenvärdena är alltså $\lambda = -6$ och $\lambda = 3$ (dubbelrot).

Vi bestämmer nu egenvektorerna.

$\lambda = -6$: Egenvektorerna är lösningar till $\big(A - (-6)E\big)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ ⊕\ -4\ \frac{1}{2} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{2} & 2 & 0 \\ 0 & -18 & -18 & 0 \\ 0 & 9 & 9 & 0 \end{array}\right) \quad 2 \quad \frac{1}{9} \quad \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{2} & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad -\frac{5}{2} \quad \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är därför

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -2t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

$\lambda = 3$: Egenvektorerna är lösningar till $(A-3E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right) \quad 2 \quad -2 \quad - \quad \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s-2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (s,\, t \text{ parametrar}).$$

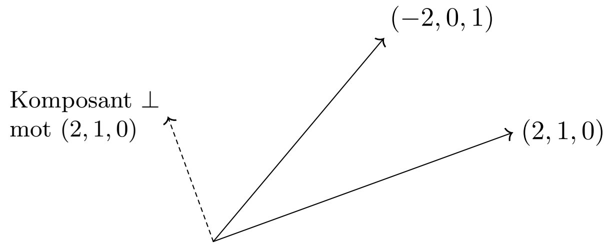
Vi ska nu välja tre ortogonala normerade egenvektorer. Eftersom egenrummet som hör till $\lambda = -6$ är en-dimensionellt och egenrummet som hör till $\lambda = 3$ är två-dimensionellt väljer vi en egenvektor från första rummet

$$(1, -2, 2),$$

och två egenvektorer från andra rummet

$$(2, 1, 0) \quad \text{och} \quad (-2, 0, 1).$$

Att matrisen är symmetrisk garanterar att $(1, -2, 2)$ är vinkelrät mot egenrummet som $(2, 1, 0)$ och $(-2, 0, 1)$ spänner upp. Däremot behöver inte $(2, 1, 0)$ och $(-2, 0, 1)$, som tillhör samma egenrum, nödvändigtvis vara ortogonala. För att få två ortogonala vektorer i egenrummet ersätter vi vektorn $(-2, 0, 1)$ med dess komposant vinkelrätt mot $(2, 1, 0)$.



Den vinkelräta komposanten blir

$$\begin{aligned} &(-2, 0, 1) - \frac{(-2, 0, 1) \cdot (2, 1, 0)}{\|(2, 1, 0)\|^2} (2, 1, 0) \\ &\qquad = (-2, 0, 1) - \frac{-4+0+0}{2^2+1^2+0^2} (2, 1, 0) = \left(-\tfrac{2}{5}, \tfrac{4}{5}, 1\right). \end{aligned}$$

De två vektorerna $(2, 1, 0)$ och $\left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)$ är alltså ortogonala och spänner upp egenrummet med egenvärdet $\lambda = 3$.

Vi har nu tre ortogonala egenvektorer. Om vi normerar dem får vi svaret

$$\begin{aligned} \frac{(1, -2, 2)}{\|(1, -2, 2)\|} &= \frac{(1, -2, 2)}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \left(\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \\ \frac{(2, 1, 0)}{\|(2, 1, 0)\|} &= \frac{(2, 1, 0)}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2}} = \left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}, 0\right), \\ \frac{(-2, 4, 5)}{\|(-2, 4, 5)\|} &= \frac{(-2, 4, 5)}{\sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 5^2}} = \left(-\tfrac{2}{3\sqrt{5}}, \tfrac{4}{3\sqrt{5}}, \tfrac{5}{3\sqrt{5}}\right). \end{aligned}$$

W524b Bestäm en matris P sådan att P^tAP blir en diagonalmatris D, samt ange D då

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ortogonal diagonalisering av en symmetrisk matris A är egentligen att vi uttrycker den linjära transformation som har A som matris i sin ortonormerade egenvektorbas $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ (basen bestående av A:s ortonormerade egenvektorer). I egenvektorbasen har nämligen transformationen matrisen

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix},$$

där λ_1 och λ_2 är A:s egenvärden, och sambandet mellan transformationens två matriser A och D är

$$A = PDP^t,$$

där P är basbytesmatrisen från egenvektorbasen till standardbasen och ges av

$$P = \begin{pmatrix} | & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \\ | & | \end{pmatrix}.$$

I korthet går alltså en ortogonal diagonalisering till som följer:

1. Bestäm egenvärden λ_1, λ_2 och motsvarande ortonormala egenvektorer $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ till matrisen A.

2. Bilda matrisen

$$P = \begin{pmatrix} | & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 \\ | & | \end{pmatrix}.$$

Då är $A = PDP^t$ där

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Från uppgift 521b får vi att matrisen A har egenvärdena $\lambda_1 = -3$ och $\lambda_2 = 2$. Motsvarande ortonormerade egenvektorer är $\boldsymbol{v}_1 = \big(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\big)$ respektive $\boldsymbol{v}_2 = \big(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\big)$.

Basbytesmatrisen blir därför

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

och diagonalmatrisen blir

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliseringen blir alltså

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Anm. Notera att egenvärdena i diagonalmatrisen är i samma ordning som motsvarande egenvektorer radas upp i P-matrisen. Hade vi istället valt

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

(d.v.s. bytt plats på egenvektorerna) skulle diagonalmatrisen blivit

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

W525 Bestäm en ortogonalmatris P sådan att P^tAP blir en diagonalmatris D, samt ange D då A är matrisen

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$,

e) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$.

Matrisen P är basbytesmatrisen från egenvektorbasen till standardbasen och ges av

$$P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \boldsymbol{v}_1 & \boldsymbol{v}_2 & \boldsymbol{v}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix},$$

där $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{v}_3$ är tre ortonormerade egenvektorer till matrisen A. Diagonalmatrisen blir då

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

där λ_1, λ_2, λ_3 är egenvärdena som hör till egenvektorerna $\boldsymbol{v}_1$ $\boldsymbol{v}_2$ respektive $\boldsymbol{v}_3$.

b) Vi har redan räknat ut egenvärden och egenvektorer i uppgift 522b,

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2 \quad \text{och} \quad \lambda_3 = 5,$$

och

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= \left(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right), \\ \boldsymbol{v}_2 &= \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\right), \quad \text{samt} \\ \boldsymbol{v}_3 &= \left(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right). \end{aligned}$$

Matriserna P och D blir

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Diagonaliseringen av A lyder alltså $A = PDP^t$, d.v.s.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

e) Vi måste först bestämma egenvärden och egenvektorer till A. Egenvärdena är rötter till sekularekvationen

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 4 \\ 4 & 1-\lambda & -8 \\ 4 & -8 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \cdots$$

$$\cdots = -\lambda^3 + 9\lambda^2 + 81\lambda - 729 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = -9 \quad \text{och} \quad \lambda = 9 \ \ \text{(dubbelrot)}.$$

Vi räknar ut motsvarande egenvektorer.

$\lambda = -9$: Egenvektorerna är lösningar till $\big(A - (-9)E\big)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Gausselimining ger

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 10 & -8 & 0 \\ 4 & -8 & 10 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} - & -4 & \frac{1}{4} \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{2} & -2 & 0 \\ 0 & -36 & 36 & 0 \\ 0 & -18 & 18 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{36} \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{5}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} -\frac{5}{2} \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är alltså

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 2t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

$\lambda = 9$: Egenvektorerna är lösningar till $(A-9E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Gausseliminering ger

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -2 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & -8 & -8 & 0 \\ 4 & -8 & -8 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} 2 & 2 & -\frac{1}{2} \end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är alltså

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2s+2t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad (s,\, t \text{ parametrar}).$$

Vi har en symmetrisk matris så egenrummen är ortogonala. Vill vi därför välja tre ortonormala egenvektorer behöver vi bara ordna med ortogonaliteten mellan vektorer inom samma egenrum.

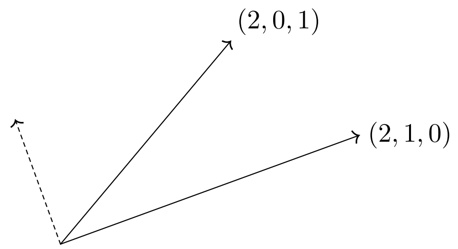
Från egenrummet som svarar mot $\lambda = -9$ får egenvektorn

$$\frac{(-1,2,2)}{\|(-1,2,2)\|} = \frac{(-1,2,2)}{\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}} = \left(-\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\right).$$

Egenrummet som svarar mot $\lambda = 9$ spänns upp av två vektorer

$$(2,1,0) \quad \text{och} \quad (2,0,1).$$

För att få två ortogonala egenvektorer ersätter vi vektorn $(2,1,0)$ med dess komposant vinkelrätt mot $(2,1,0)$,



$$\begin{aligned} (2,0,1) &- \frac{(2,0,1)\cdot(2,1,0)}{\|(2,1,0)\|^2}(2,1,0) \\ &= (2,0,1) - \frac{2\cdot 2+0\cdot 1+1\cdot 0}{2^2+1^2+0^2}(2,1,0) \\ &= (2,0,1) - \left(\tfrac{8}{5}, \tfrac{4}{5}, 0\right) = \left(\tfrac{2}{5}, -\tfrac{4}{5}, 1\right). \end{aligned}$$

Två ortonormala egenvektorer i egenrummet är alltså

$$\frac{(2,1,0)}{\|(2,1,0)\|} = \left(\tfrac{2}{\sqrt{5}}, \tfrac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) \quad \text{och} \quad \frac{(2,-4,5)}{\|(2,-4,5)\|} = \left(\tfrac{2}{3\sqrt{5}}, -\tfrac{4}{3\sqrt{5}}, \tfrac{5}{3\sqrt{5}}\right).$$

Basbytesmatrisen P kan vi alltså välja som

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Då blir diagonalmatrisen

$$D = \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

och diagonaliseringen lyder

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

W526 Den symmetriska matrisen A har egenvektorerna $(1,2,1)$, $(1,0,-1)$

och $(1,-1,1)$, som hör till egenvärdena 1, 3 respektive 4. Bestäm A.

Eftersom matrisen A är symmetrisk är den ortogonalt diagonaliserbar

$$A = PDP^t,$$

där matrisen P består av ortonormerade egenvektorer till A och diagonalmatrisen D av A:s egenvärden.

Normerar vi de tre egenvektorerna

$$\frac{(1,2,1)}{\|(1,2,1)\|} = \frac{(1,2,1)}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{6}}, \tfrac{2}{\sqrt{6}}, \tfrac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

$$\frac{(1,0,-1)}{\|(1,0,-1)\|} = \frac{(1,0,-1)}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\frac{(1,-1,1)}{\|(1,-1,1)\|} = \frac{(1,-1,1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \left(\tfrac{1}{\sqrt{3}}, -\tfrac{1}{\sqrt{3}}, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right),$$

får vi tre ortonormerade egenvektorer (eftersom A är symmetrisk är de ortogonala) och P sätter vi till

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

I diagonaliseringen blir då

$$D = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix}.$$

Vi får att A är

$$\begin{aligned} A &= PDP^t \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{3}} & -\frac{4}{\sqrt{3}} & \frac{4}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

W527 *Beräkning av matrispotenser.* Man kan beräkna en potens A^k av en symmetrisk matris A för ett godtyckligt positivt heltal k, d.v.s. produkten $AA\cdots A$ av k faktorer A, på följande sätt: Diagonalisera först A med hjälp av en lämplig ortogonalmatris: $P^tAP = D$. Härav följer, eftersom $P^{-1} = P^t$, att $A = PDP^t$. Då är $A^2 = AA = (PDP^t)(PDP^t) = (PD)(P^tP)(DP^t) = (PD)E(DP^t) = PDDP^t = PD^2P^t$. Allmänt får man på samma sätt att $A^k = PD^kP^t$. Matrisen D^k beräknas lätt: man finner att

$$\begin{aligned} D &= \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \quad D^2 &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ \Rightarrow \quad D^k &= \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \end{aligned}$$

för godtyckligt positivt heltal k.

b) Beräkna A^k för godtyckligt positivt heltal k, då A är matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ange speciellt A^{2n} och A^{2n+1}.

c) Beräkna A^{2n} och A^{2n+1} då

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) Om vi ska använda metoden i uppgiftstexten måste vi först ortogonalt diagonalisera A. Det första steget är att bestämma egenvärden och egenvektorer till A.

Egenvärdena är rötter till sekularekvationen

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & -\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda = -3, \quad \lambda = 0 \quad \text{eller} \quad \lambda = 3.$$

Vi bestämmer motsvarande egenvektorer.

$\lambda = -3$: Egenvektorerna är lösningar till $\big(A - (-3)E\big)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Vi Gausseliminerar

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right)
\begin{matrix} -\;\;\tfrac{1}{2} \\ \\ \end{matrix}
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right)
\begin{matrix} \\ 2\;\;- \\ \end{matrix}
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

Egenvektorerna är alltså

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t \\ 2t \\ t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (t \text{ parameter}).
$$

$\lambda = 0$: Egenvektorerna är lösningar till $(A - 0\,E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Vi Gausseliminerar

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)
\begin{matrix} 2\;\;- \\ \\ \end{matrix}
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right)
\begin{matrix} \\ \tfrac{1}{2}\;\;\tfrac{1}{2}\;\;\tfrac{1}{4} \\ \end{matrix}
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

Egenvektorerna är alltså

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t \\ t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).
$$

$\lambda = 3$: Egenvektorerna är lösningar till $(A - 3E)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Vi Gausseliminerar

$$
\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)
\begin{matrix} \\ 2\;\;\tfrac{1}{2} \\ \end{matrix}
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\tfrac{3}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array}\right)
\begin{matrix} \\ -\tfrac{1}{2}\;\;-\tfrac{3}{8}\;\;-\tfrac{1}{4} \\ \end{matrix}
\sim
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \tfrac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)
$$

Egenvektorerna är alltså

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ -2t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).
$$

Eftersom matrisen är symmetrisk och egenrummen är en-dimensionella får vi en ortonormerad egenvektorbas genom att välja en normerad vektor från varje egenrum,

$$
\frac{(-2,2,1)}{\|(-2,2,1)\|} = \frac{(-2,2,1)}{\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}} = \big(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\big),
$$

$$
\frac{(2,1,2)}{\|(2,1,2)\|} = \frac{(2,1,2)}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}} = \big(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}\big),
$$

$$
\frac{(-1,-2,2)}{\|(-1,-2,2)\|} = \frac{(-1,-2,2)}{\sqrt{(-1)^2+(-2)^2+2^2}} = \big(-\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}\big).
$$

Basbytesmatrisen P blir

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

och diagonaliseringen är

$$A = PDP^t = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Potensmatrisen blir nu

$$\begin{aligned} A^k &= P^t D^k P \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-3)^k & 0 & 0 \\ 0 & 0^k & 0 \\ 0 & 0 & 3^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}(-3)^k & \frac{2}{3}(-3)^k & \frac{1}{3}(-3)^k \\ \frac{2}{3}0^k & \frac{1}{3}0^k & \frac{2}{3}0^k \\ -\frac{1}{3}3^k & -\frac{2}{3}3^k & \frac{2}{3}3^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{4}{9}(-3)^k + 0 + \frac{1}{9}3^k & -\frac{4}{9}(-3)^k + 0 + \frac{2}{9}3^k & -\frac{2}{9}(-3)^k + 0 - \frac{2}{9}3^k \\ -\frac{4}{9}(-3)^k + 0 + \frac{2}{9}3^k & \frac{4}{9}(-3)^k + 0 + \frac{4}{9}3^k & \frac{2}{9}(-3)^k + 0 - \frac{4}{9}3^k \\ -\frac{2}{9}(-3)^k + 0 - \frac{2}{9}3^k & \frac{2}{9}(-3)^k + 0 - \frac{4}{9}3^k & \frac{1}{9}(-3)^k + 0 + \frac{4}{9}3^k \end{pmatrix} \\ &= 3^{k-2} \begin{pmatrix} 1 + 4(-1)^k & 2 - 4(-1)^k & -2 - 2(-1)^k \\ 2 - 4(-1)^k & 4 + 4(-1)^k & -4 + 2(-1)^k \\ -2 - 2(-1)^k & -4 + 2(-1)^k & 4 + 1(-1)^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

När $k = 2n =$ jämnt helta är $(-1)^k = +1$ och vi får

$$A^{2n} = 3^{2n-2} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -4 \\ -2 & 8 & -2 \\ -4 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

När $k = 2n + 1 =$ udda heltal är $(-1)^k = -1$ och vi får

$$A^{2n+1} = 3^{2n-1} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 6 & 0 & -6 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix} = 3^{2n} A.$$

c) I uppgift 525e diagonaliserade vi matrisen A,

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -8 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix} \\ &\quad = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Potenser av A blir därför

$$\begin{aligned} A^k &= PD^kP^t \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-9)^k & 0 & 0 \\ 0 & 9^k & 0 \\ 0 & 0 & 9^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}(-9)^k & \frac{2}{3}(-9)^k & \frac{2}{3}(-9)^k \\ \frac{2}{\sqrt{5}}9^k & \frac{1}{\sqrt{5}}9^k & 0 \\ \frac{2}{3\sqrt{5}}9^k & -\frac{4}{3\sqrt{5}}9^k & \frac{5}{3\sqrt{5}}9^k \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{9}(-9)^k + \frac{4}{5}9^k + \frac{4}{9\cdot 5}9^k & -\frac{2}{9}(-9)^k + \frac{2}{5}9^k - \frac{8}{9\cdot 5}9^k & -\frac{2}{9}(-9)^k + 0\,9^k + \frac{10}{9\cdot 5}9^k \\ -\frac{2}{9}(-9)^k + \frac{2}{5}9^k - \frac{8}{9\cdot 5}9^k & \frac{4}{9}(-9)^k + \frac{1}{5}9^k + \frac{16}{9\cdot 5}9^k & \frac{4}{9}(-9)^k + 0\,9^k - \frac{20}{9\cdot 5}9^k \\ -\frac{2}{9}(-9)^k + 0\,9^k + \frac{10}{9\cdot 5}9^k & \frac{4}{9}(-9)^k + 0\,9^k - \frac{20}{9\cdot 5}9^k & \frac{4}{9}(-9)^k + 0\,9^k + \frac{25}{9\cdot 5}9^k \end{pmatrix} \\ &= \frac{9^{k-1}}{5} \begin{pmatrix} 40 + 5(-1)^k & 10 - 10(-1)^k & 10 - 10(-1)^k \\ 10 - 10(-1)^k & 25 + 20(-1)^k & -20 + 20(-1)^k \\ 10 - 10(-1)^k & -20 + 20(-1)^k & 25 + 20(-1)^k \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

När $k = 2n =$ jämnt heltal är $(-1)^k = +1$ och vi får

$$A^{2n} = \frac{9^{2n-1}}{5}\begin{pmatrix}45 & 0 & 0\\ 0 & 45 & 0\\ 0 & 0 & 45\end{pmatrix} = 9^{2n}E.$$

När $k = 2n+1 =$ udda heltal är $(-1)^k = -1$ och vi får

$$A^{2n+1} = \frac{9^{2n}}{5}\begin{pmatrix}35 & 20 & 20\\ 20 & 5 & -40\\ 20 & -40 & 5\end{pmatrix} = 9^{2n}E.$$

W528 Fibonaccis talföljd $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, d.v.s. $x_0, x_1, x_2, \ldots$, definieras genom rekursionsformeln

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}$$

och begynnelsevärdena $x_0 = 0$, $x_1 = 1$. Man finner följden $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$. Övergången från talen x_{n-2} och x_{n-1} till talen x_{n-1} och x_n kan skrivas

$$\begin{pmatrix}x_n\\ x_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ x_{n-2}\end{pmatrix}.$$

Bestäm med hjälp härav en explicit formel för x_n, d.v.s. uttryck x_n som en funktion av n. Vad kan sägas om x_n för stora n.

Om vi använder matrissambandet några gånger

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}x_2\\ x_1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}x_3\\ x_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_2\\ x_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}x_4\\ x_3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_3\\ x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

så kan vi uttyda mönstret

$$\begin{pmatrix}x_n\\ x_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

Även om vi kan vara ganska övertygande om att $(*)$ är riktig så behöver vi någon metod för att helt säkert fastställa att $(*)$ är sann.

Formeln $(*)$ är egentligen ett uttalande om oändligt många samband

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}x_2\\ x_1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^1\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}x_3\\ x_2\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^2\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\\
\begin{pmatrix}x_4\\ x_3\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^3\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},\\
&\vdots
\end{aligned}$$

och är en indexering (uppräkning) av alla dessa samband. Vad vi kan notera i $(*)$ är att varje påstående bygger på ett tidigare påstående. Påstående nr n får vi från påstående nr $n-1$ genom

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}x_n\\ x_{n-1}\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{n-1}\\ x_{n-2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-2}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Det är just i dessa typer av situationer som matematisk induktion är lämplig som bevismetod.

Låt P_n vara påståendet

$$\begin{pmatrix}x_n\\ x_{n-1}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^{n-1}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.$$

1 (Basfallet)

P_1 är sann, ty

$$\langle\ \text{VL AV } P_1\ \rangle = \begin{pmatrix}x_1\\ x_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^0\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \langle\ \text{HL AV } P_1\ \rangle.$$

② (Induktionssteget)
Vi visar att $P_n \Rightarrow P_{n+1}$

$$\begin{aligned}\langle \text{VL AV } P_{n+1} \rangle &= \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} \\ &= \{\, P_n \text{ antas vara sann} \,\} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \langle \text{HL AV } P_{n+1} \rangle\end{aligned}$$

③ Av induktionsaxiomet följer att P_n är sann för alla positiva heltal n.

Vi har alltså visat att

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

för alla $n \geq 1$.

För att räkna ut x_n behöver vi alltså kunna beräkna

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1}.$$

Vi kan använda metoden i uppgift 528: Diagonalisera $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = PDP^t.$$

Då är

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} &= \bigl(PDP^t\bigr)\bigl(PDP^t\bigr)\cdots\bigl(PDP^t\bigr) \\ &= PD\bigl(P^tP\bigr)D\bigl(P^tP\bigr)\cdots\bigl(P^tP\bigr)DP^t = PD^{n-1}P^t.\end{aligned}$$

Matrisen $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ har egenvärdena

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \lambda = \tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Motsvarande egenvektorer är

$\lambda = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$: Egenvektorerna är lösningar till $\bigl(A - (\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5})E\bigr)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Gauss-eliminering ger

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 \\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är alltså

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-\sqrt{5}\,)t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1-\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

$\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$: Egenvektorerna är lösningar till $\bigl(A - (\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5})E\bigr)\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$. Gauss-eliminering ger

$$\left(\begin{array}{cc|c} \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} & 1 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Egenvektorerna är alltså

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\sqrt{5}\,)t \\ 2t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1+\sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad (t \text{ parameter}).$$

Normerade egenvektorer från varje egenrum är

$$\begin{aligned}\frac{(1-\sqrt{5},2)}{\|(1-\sqrt{5},2)\|} &= \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\bigl(1-\sqrt{5},2\bigr), \\ \frac{(1+\sqrt{5},2)}{\|(1+\sqrt{5},2)\|} &= \frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\bigl(1+\sqrt{5},2\bigr).\end{aligned}$$

Vi sätter alltså

$$P = \begin{pmatrix} \dfrac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \dfrac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ \dfrac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \dfrac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{pmatrix}$$

och får

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} &= PD^{n-1}P^t \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \\ \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} & \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \\ \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} & \frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} & * \\ * & * \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Vi får därför en formel för x_n,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_n \\ * \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} & * \\ * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n} \\ * \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow \qquad x_n &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.
\end{aligned}$$

Eftersom $-1 < 1-\sqrt{5} < 0$ så kommer kommer $(1-\sqrt{5})^n$ vara exponentiellt liten när n är stor, och vi har

$$x_n \approx \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}.$$

W531 Överför genom en ortogonal koordinattransformation följande kvadratiska former till kanonisk form. Ange även den använda koordinattransformationen. (Använd resultaten från uppgift 521 och 522.)

b) $-2x^2 + 4xy + y^2$,

d) $8x^2 - 12xy + 17y^2$,

f) $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy - 4yz$,

h) $2x^2 - y^2 - z^2 + 4xy - 4xz + 8yz$.

b) Vi skriver först den kvadratiska formen med en matris,

$$-2x^2 + 4xy + y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Diagonalelementen i matrisen är koefficienterna framför kvadrattermerna och de två utomdiagonala elementen svarar båda mot korstermens koefficient.

Den kvadratiska formens matris är symmetrisk och enligt uppgift 521b har den följande egenvärden och normerade egenvektorer

egenvärden	-3	2
egenvektorer	$(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$,	$(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$.

Vi väljer därför basbytesmatrisen från egenvektorbasen till standardbasen som

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Notera att vi ordnat kolumnerna i P så att $\det P = +1$, vilket betyder att basbytet är en rotation.

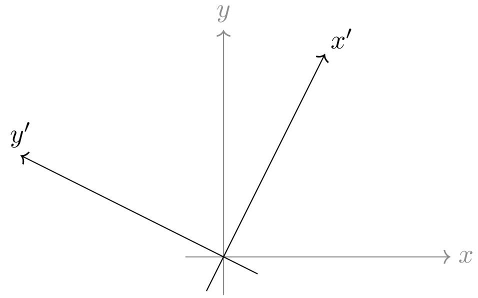
I de nya koordinaterna

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} x + 2y \\ -2x + y \end{pmatrix}$$

blir den kvadratiska formen

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 2(x')^2 - 3(y')^2.$$

Detta är den kvadratiska formen skriven i kanonisk form.



Egenvektorbasen

d) Den kvadratiska formen blir i matrisform

$$8x^2 - 12xy + 17y^2 = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -6 \\ -6 & 17 \end{pmatrix}$$

har enligt uppgift 521d följande egenvärden och egenvektorer

$$\begin{array}{rcc} \text{egenvärden} & 5 & 20 \\ \text{egenvektorer} & \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), & \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right). \end{array}$$

Vi väljer därför diagonaliseringsmatrisen till

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

I de nya koordinaterna

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2x + y \\ -x + 2y \end{pmatrix}$$

i egenvektorbasen har den kvadratiska formens s.k. kanoniska form utseendet

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 5(x')^2 + 20(y')^2.$$

f) Vi skriver den kvadratiska formen i matrisform

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy - 4yz = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Från uppgift 522b får vi att matrisen har egenvärdena och egenvektorerna

$$\begin{array}{rccc} \text{egenvärden} & -1 & 2 & 5, \\ \text{egenvektorer} & \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) & \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) & \left(-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right). \end{array}$$

Vi väljer basbytesmatrisen till

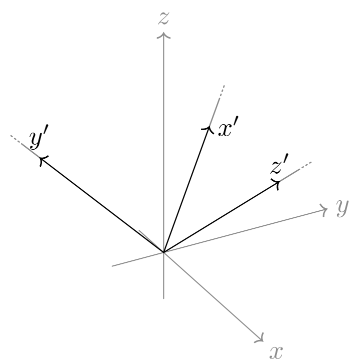
$$P = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}, \qquad (\det P = +1).$$

I egenvektorbasens koordinater

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2x + 2y + z \\ -x - 2y + 2z \\ 2x + y + 2z \end{pmatrix}$$

har den kvadratiska formen det kanoniska utseendet

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -(x')^2 + 5(y')^2 + 2(z')^2.$$



h) Först skriver vi om den kvadratiska formen i matrisform

$$2x^2 - y^2 - z^2 + 4xy - 4xz + 8xz$$
$$= \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Matrisen är densamma som i uppgift 522d och har egenvärdena och egenvektorerna

$$\begin{array}{rccc} \text{egenvärden} & -6 & 3 & 3, \\ \text{egenvektorer} & \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) & \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0\right) & \left(-\frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{5}{3\sqrt{5}}\right). \end{array}$$

Basbytesmatrisen sätter vi därför till

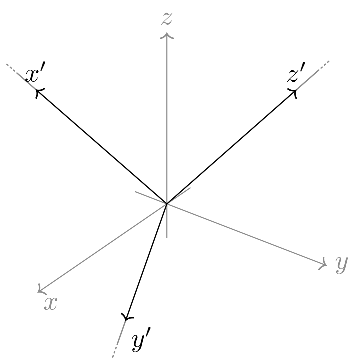
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad (\det P = +1)$$

och i de nya koordinaterna

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P^t \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{5}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(x - 2y + 2z) \\ \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y) \\ \frac{1}{3\sqrt{5}}(-2x + 4y + 5z) \end{pmatrix}$$

blir den kanoniska formen

$$\begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -6(x')^2 + 3(y')^2 + 3(z')^2.$$



W532 Ange den geometriska betydelsen av andragradsekvationerna

b) $Q(x,y) = -2x^2 + 4xy + y^2 = 1$,

d) $Q(x,y) = 8x^2 - 12xy + 17y^2 = 1$,

f) $Q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy - 4yz = 1$,

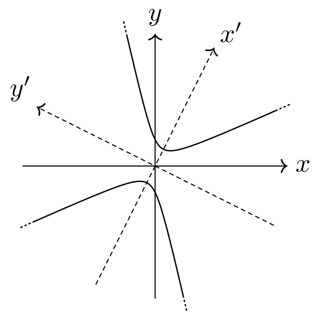
h) $Q(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - z^2 + 4xy - 4xz + 8yz = 1$.

I uppgift 531 skrev vi de kvadratiska formerna i kanonisk form och vi ska utnyttja detta för att ange vilken typ av kurva/yta ekvation bestämmer.

b) I egenvektorbasen har ekvationen utseendet

$$2(x')^2 - 3(y')^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{x'}{1/\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{y'}{1/\sqrt{3}}\right)^2 = 1,$$

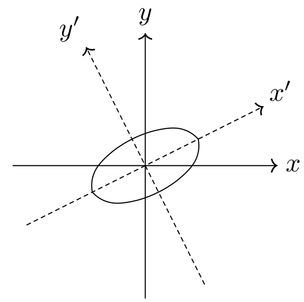
vilket är en hyperbel med halvaxlar $\frac{1}{\sqrt{2}}$ och $\frac{1}{\sqrt{3}}$.



d) Ekvationen blir i egenvektorbasen

$$5(x')^2 + 20(y')^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left(\frac{x'}{1/\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{1/\sqrt{20}}\right)^2 = 1$$

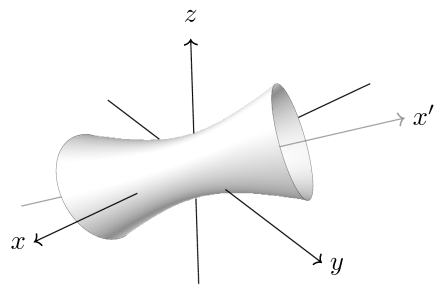
vilket är en ellips med halvaxlar $\frac{1}{\sqrt{5}}$ och $\frac{1}{\sqrt{20}}$.



f) När vi byter till egenvektorbasen får ekvationen utseendet

$$
\begin{aligned}
& -(x')^2+5(y')^2+2(z')^2=1 \\
\Leftrightarrow\quad & -(x')^2+\left(\frac{y'}{1/\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{z'}{1/\sqrt{2}}\right)^2=1,
\end{aligned}
$$

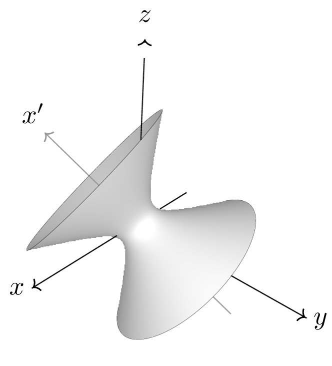
vilket är en enmantlad hyperboloid med x'-axeln som axel och halvaxlar 1, $\frac{1}{\sqrt{5}}$ och $\frac{1}{\sqrt{2}}$.



h) Ekvationens utseende i egenvektorbasen är

$$
\begin{aligned}
& -6(x')^2+3(y')^2+3(z')^2=1 \\
\Leftrightarrow\quad & -\left(\frac{x'}{1/\sqrt{6}}\right)^2+\left(\frac{y'}{1/\sqrt{3}}\right)^2+\left(\frac{z'}{1/\sqrt{3}}\right)^2=1.
\end{aligned}
$$

Detta är en enmantlad hyperboloid med x'-axeln som axel och halvaxlar $\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ och $\frac{1}{1/\sqrt{3}}$.



W533 Ange den geometriska betydelsen av andragradsekvationerna

b) $Q(x,y)=-2x^2+4xy+y^2=-1$,

d) $Q(x,y)=8x^2-12xy+17y^2=-1$,

f) $Q(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+4xy-4yz=-1$,

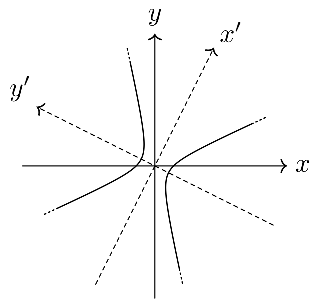
h) $Q(x,y,z)=2x^2-y^2-z^2+4xy-4xz+8yz=-1$.

Vi använder kanoniska formerna som vi räknade ut i uppgift 531 för att ange vilken typ av kurva/yta respektive ekvation bestämmer.

b) Ekvationen har följande utseende i egenvektorbasen

$$
2(x')^2-3(y')^2=-1 \quad\Leftrightarrow\quad -\left(\frac{x'}{1/\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{y'}{1/\sqrt{3}}\right)^2=1,
$$

vilket är en hyperbel med halvaxlar $1/\sqrt{2}$ och $1/\sqrt{3}$.



d) Ekvationen blir i egenvektorbasen

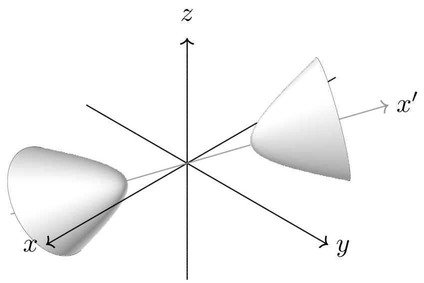
$$
5(x')^2+20(y')^2=-1.
$$

Eftersom vänsterledet är summan av två kvadrater och alltid positiv finns det inga punkter (x',y') som uppfyller ekvationer.

f) I egenvektorbasen har ekvationen utseende

$$
\begin{aligned}
& -(x')^2+5(y')^2+2(z')^2=-1 \\
\Leftrightarrow\quad & -(x')^2+\left(\frac{y'}{1/\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{z'}{1/\sqrt{2}}\right)^2=-1.
\end{aligned}
$$

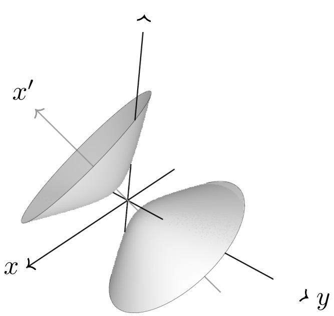
Vi känner igen denna yta som en tvåmantlad hyperboloid med x'-axeln som axel och halvaxlar 1, $\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}$.



h) Ekvationens utseende i egenvektorbasen är

$$
\begin{aligned}
&-6(x')^2 + 3(y')^2 + 3(z')^2 = -1 \\
\Leftrightarrow \quad & -\left(\frac{x'}{1/\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{1/\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{z'}{1/\sqrt{3}}\right)^2 = -1,
\end{aligned}
$$

vilket är en tvåmantlad hyperboloid med x'-axeln som symmetriaxel och halvaxlar $\frac{1}{\sqrt{6}}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$ och $\frac{1}{\sqrt{3}}$.



W534 Ange den geometriska betydelsen av andragradsekvationerna

b) $Q(x,y) = -2x^2 + 4xy + y^2 = 0$,

d) $Q(x,y) = 8x^2 - 12xy + 17y^2 = 0$,

f) $Q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 4xy - 4yz = 0$,

h) $Q(x,y,z) = 2x^2 - y^2 - z^2 + 4xy - 4xz + 8yz = 0$.

Vi gör som i de tidigare uppgifterna och skriver om ekvationerna i kanonisk form.

b)
$$
\begin{aligned}
& -\left(\frac{x'}{1/\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{1/\sqrt{3}}\right)^2 = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \left(\frac{y'}{1/\sqrt{3}} - \frac{x'}{1/\sqrt{2}}\right)\left(\frac{y'}{1/\sqrt{3}} + \frac{x'}{1/\sqrt{2}}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{y'}{1/\sqrt{3}} - \frac{x'}{1/\sqrt{2}} = 0 \quad \text{eller} \quad \frac{y'}{1/\sqrt{3}} + \frac{x'}{1/\sqrt{2}} = 0,
\end{aligned}
$$

d)
$$
\left(\frac{x'}{1/\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{1/\sqrt{20}}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x' = y' = 0,
$$

f)
$$
-(x')^2 + \left(\frac{y'}{1/\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{z'}{1/\sqrt{2}}\right)^2 = 0
$$

h)
$$
-\left(\frac{x'}{1/\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{1/\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{z'}{1/\sqrt{3}}\right)^2 = 0
$$

Då ser vi att vi har två räta linjer i b-uppgiften och origo i d-uppgiften. I f- och h-uppgifterna har vi koner med x'-axeln som axel.