Algebra och geometri

- Geometrisk tolkning av linjära ekvationssystem
  - 2×2-fallet
  - 3×3-fallet

Rummen $\mathbb{R}^n$

- Det n-dimensionella rummet $\mathbb{R}^n$
  - De enkla räknesätten
  - Skalärprodukt
  - Räkneregler
- Linjärkombination
  - Definition
  - En matrisformulering av linjärkombination
- Linjärt oberoende
  - Alternativ definition
  - En matrisformulering av linjärt oberoende
- Bas

Geometrisk tolkning av linjära ekvationssystem

Uttryck av typen

$$x+2y=1 \quad \text{och} \quad 2x-y+3z=-1$$

har vi stött på i två olika sammanhang

- dels som enskilda ekvationer i linjära ekvationssystem,
- dels som ekvationer för linjer i planet eller ekvationer för plan i rummet.

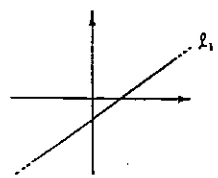
Vi ska nu kombinera dessa synsett och ge en geometrisk tolkning av lösningsmängden till ett linjärt ekvationssystem.

2×2 – fallet

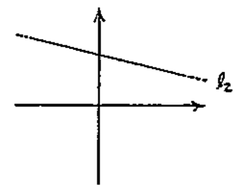
Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x + 2y = 4. \end{cases}$$

Båda dessa ekvationer kan vi tolka som linjer i planet

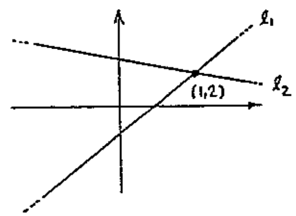


$x-y=1$



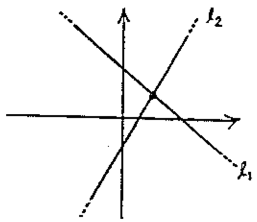
$x+2y=4$

Lösningen $x=2, y=1$ till systemet uppfyller båda ekvationerna och därför är $(x,y)=(1,2)$ en punkt på båda linjerna, dvs deras skärningspunkt.

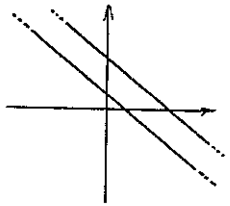


Lösningsmängden till ett 2×2-system är alltså de punkter som ekvationernas linjer har gemensamt.

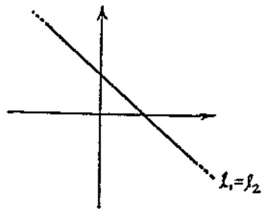
I 2×2-fallet kan vi ha tre olika typer av lösningsmängder



exakt en lösning
(ℓ_1 och ℓ_2 skär varandra)



saknar lösning
(ℓ_1 och ℓ_2 är parallella)



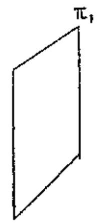
parameterlösning
(ℓ_1 och ℓ_2 sammanfaller)

3×3-fallet

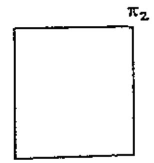
Betrakta ekvationssystemet

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ x + y = 0, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

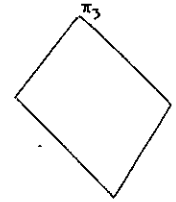
Varje ekvation beskriver ett plan i rummet.



$x-y=2$

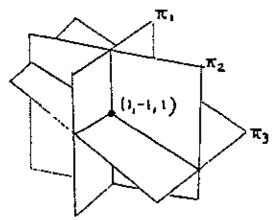


$x+y=0$



$x+y+z=1$

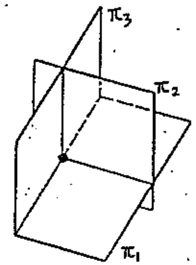
Lösningen $x=1$, $y=-1$, $z=1$ uppfyller alla tre ekvationer och därför är $(x,y,z)=(1,-1,1)$ den punkt som tillhör alla tre plan, dvs den punkt där planen möts



Lösningsmängden till ett 3×3-system är alltså de punkter som ekvationernas plan har gemensamt.

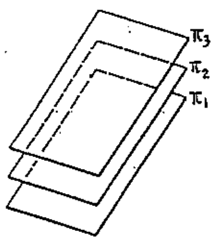
De tre typerna av lösningar till ett 3×3-system svarar mot följande konfigurationer av ekvationernas plan

exakt en lösning..

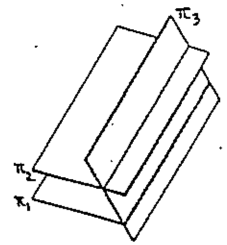


Planen skär varandra i en punkt.

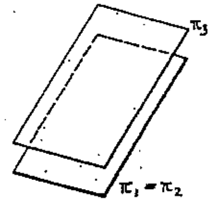
saknar lösning..



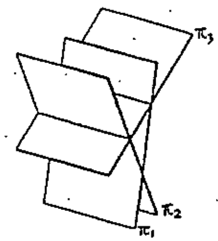
Planen är parallella.



Två av planen är parallella, medan det tredje planet skär de två planen.

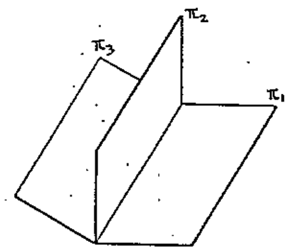


Två av planen sammanfaller medan det tredje planet är parallellt.

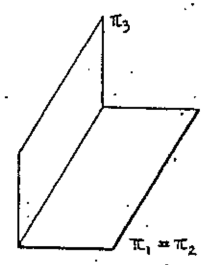


De tre planen har skärningslinjer som är parallella.

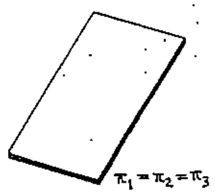
parameterlösning.



De tre planen skär varandra utmed en gemensam linje. Skärningslinjen innehåller alla lösningar.



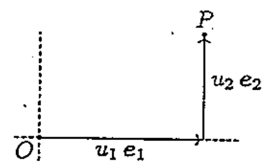
Två av planen sammanfaller och skär det tredje planet längs en linje.

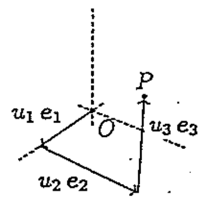


Alla tre plan sammanfaller och det gemensamma planet är lösningsmängden. Vi behöver i detta fall två parametrar för att beskriva lösningen.

Det n-dimensionella rummet $\mathbb{R}^n$

När vi beskriver vektorer i planet och rummet använder vi ett koordinatsystem och kan på så sätt ange vektorer som talpar (u_1, u_2) respektive taltripplar (u_1, u_2, u_3).





Vi kan utöka denna beskrivning till 4-tupler (u_1, u_2, u_3, u_4), 5-tupler $(u_1, u_2, u_3, u_4, u_5)$ o.s.v. utan att vi för den skull har ett geometriskt rum som vi utgår ifrån.

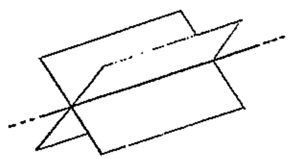
"Vektorerna" vi får blir på så sätt mer abstrakta eftersom vi inte kan placera dem i ett konkret rum, men vi kan fortfarande räkna med dem och tänka oss något mytiskt högredimensionellt rum där de finns.

Exempel

Ekvationssystemet

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 7 \\ -x_1 - x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 9 \end{cases}$$

kan vi tänka oss som två hyperplan i ett fyrdimensionellt rum och där de skär varandra har vi lösningsmängden.



(Lösningsmängden blir f.ö. ett tvådimensionellt plan i $\mathbb{R}^4$ varför vi behöver två parametrar för att beskriva den.)

De enkla räknesätten

Vi definierar addition, subtraktion och multiplikation med skalär helt analogt med lägredimensionella vektorer

- $(u_1, u_2, \ldots, u_n) + (v_1, v_2, \ldots, v_n)$
  $= (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$,
- $(u_1, u_2, \ldots, u_n) - (v_1, v_2, \ldots, v_n)$
  $= (u_1 - v_1, u_2 - v_2, \ldots, u_n - v_n)$,
- $k(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (ku_1, ku_2, \ldots, ku_n)$.

Skalärprodukt

Skalärprodukten mellan två vektorer $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ och $\bar{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ definieras som

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n.$$

Om $\bar{u} \cdot \bar{v} = 0$ säger vi att vektorerna är ortogonala (vinkelräta),

Räkneregler

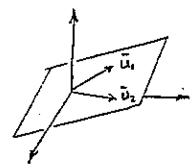
Om u, v och w är vektorer och k, ℓ är skalärer, då gäller att

- $\bar{u} + \bar{v} = \bar{v} + \bar{u}$,
- $\bar{u} + (\bar{v} + \bar{w}) = (\bar{u} + \bar{v}) + \bar{w}$,
- $k(\ell \bar{u}) = (k\ell)\bar{u}$,
- $k(\bar{u} + \bar{v}) = k\bar{u} + k\bar{v}$,
- $(k+\ell)\bar{u} = k\bar{u} + \ell\bar{u}$,
- $\bar{u} \cdot \bar{v} = \bar{v} \cdot \bar{u}$,
- $k(\bar{u} \cdot \bar{v}) = \bar{u} \cdot (k\bar{v}) = (k\bar{u}) \cdot \bar{v}$,
- $\bar{u} \cdot (\bar{v} + \bar{w}) = \bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$.

Det är samma räkneregler som för "vanliga" vektorer.

Linjärkombination

Om vi i rummet väljer två ortsvektorer $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$, då spänner de typiskt sett upp ett plan (såvida de inte är parallella).



Med det menar vi det plan som går genom origo och är parallellt med $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$.

Om vi utgår från origo och endast får gå i riktningarna $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$ då kommer vi till exakt de punkter som ligger i planet. Detta betyder att varje vektor $\bar{v}$ i planet kan skrivas som

$$\bar{v} = k_1\bar{u}_1 + k_2\bar{u}_2$$

En vektorsumma av den typen kallas för en linjärkombination av $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$.

Definition

Mer allmänt kallar vi en vektorsumma av typen

$$\bar{v} = k_1\bar{u}_1 + k_2\bar{u}_2 + \cdots + k_n\bar{u}_n,$$

där $k_1, k_2, \ldots, k_n$ är skalärer, för en linjärkombination av $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n$.

Exempel

Visa att $\bar{v} = (4,2,1,18)$ är en linjärkombination av $\bar{u}_1 = (1,-1,4,3)$ och $\bar{u}_2 = (2,0,3,8)$.

Vi ska alltså visa att det finns två tal k_1 och k_2 så att

$$(4,2,1,18) = k_1(1,-1,4,3) + k_2(2,0,3,8).$$

Vi skriver högerledet som ett uttryck

$$(4,2,1,18) = (k_1+2k_2, -k_1, 4k_1+3k_2, 3k_1+8k_2),$$

och när vi identifierar koordinaterna i båda led fås

$$\begin{cases} 4 = k_1 + 2k_2, \\ 2 = -k_1, \\ 1 = 4k_1 + 3k_2, \\ 18 = 3k_1 + 8k_2. \end{cases}$$

Detta linjära ekvationssystem har lösningen $k_1 = -2$, $k_2 = 3$, vilket alltså visar att

$$\bar{v} = -2\bar{u}_1 + 3\bar{u}_2.$$

En matrisformulering av linjärkombination

När vi ska uttrycka en vektor v som en linjärkombination av vektorerna $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$ ska vi alltså lösa ekvationen

$$k_1 \begin{pmatrix} | \\ \bar{u}_1 \\ | \end{pmatrix} + \cdots + k_n \begin{pmatrix} | \\ \bar{u}_n \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ \bar{v} \\ | \end{pmatrix}$$

där $k_1, k_2, \ldots, k_n$ är de obekanta.

Vi kan skriva ekvationen med matriser

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \cdots & \bar{u}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ \bar{v} \\ | \end{pmatrix}.$$

Genom att lösa detta system får vi fram de sökta $k_1, k_2, \ldots, k_n$.

Exempel

Uttryck $\bar{v} = (2,-1,3)$ som en linjärkombination av $\bar{u}_1 = (1,0,0)$, $\bar{u}_2 = (2,2,0)$ och $\bar{u}_3 = (3,3,3)$.

Vi ska bestämma k_1, k_2 och k_3 så att

$$\bar{v} = k_1\bar{u}_1 + k_2\bar{u}_2 + k_3\bar{u}_3,$$

vilket ger ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Detta ekvationssystem har lösningen

$$k_1 = 3, \quad k_2 = -2 \quad \text{och} \quad k_3 = 1.$$

Alltså är

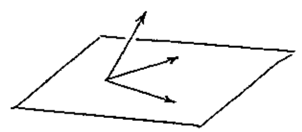
$$\bar{v} = 3\bar{u}_1 - 2\bar{u}_2 + \bar{u}_3.$$

Linjärt oberoende

Vektorerna $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ är linjärt oberoende om ingen av $\bar{u}_i$:na kan skrivas som en linjärkombination av de övriga, annars sägs de vara linjärt beroende.

Exempel

Tre vektorer i rummet är linjärt oberoende om de inte är komplana.



I korthet kan vi säga att $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ är linjärt oberoende om varje vektor i samlingen pekar i en egen riktning.

Alternativ definition

För att undersöka om en samling vektorer $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n\}$ är linjärt oberoende behöver vi alltså kontrollera om

- $\bar{u}_1$ är en linjärkombination av $\bar{u}_2, \bar{u}_3, \dots, \bar{u}_n$, dvs om det finns $k_2, k_3, \dots, k_n$ så att
$$\bar{u}_1 = k_2\bar{u}_2 + k_3\bar{u}_3 + \dots + k_n\bar{u}_n,$$
- $\bar{u}_2$ är en linjärkombination av $\bar{u}_1, \bar{u}_3, \dots, \bar{u}_n$, dvs om det finns $\ell_1, \ell_3, \dots, \ell_n$ så att
$$\bar{u}_2 = \ell_1\bar{u}_1 + \ell_3\bar{u}_3 + \dots + \ell_n\bar{u}_n,$$

. . . .

- $\bar{u}_n$ är en linjärkombination av $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_{n-1}$, dvs om det finns $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ så att
$$\bar{u}_n = \alpha_1\bar{u}_1 + \alpha_2\bar{u}_2 + \dots + \alpha_{n-1}\bar{u}_{n-1}.$$

Först då vet vi om hela samlingen är linjärt oberoende.

Men det finns ett enklare sätt:

<u>Sats</u> Samlingen $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$ är linjärt oberoende

$\Leftrightarrow$

Ekvationen

$$k_1\bar{u}_1 + k_2\bar{u}_2 + \cdots + k_n\bar{u}_n = \bar{0} \qquad (*)$$

har endast den triviala lösningen $k_1 = k_2 = \cdots = k_n = 0$.

Vi kan se att ovanstående stämmer, för om vi t.ex. har en icke-trivial lösning där $k_2 \neq 0$ då kan vi dela båda led med k_2 och få

$$\frac{k_1}{k_2}\bar{u}_1 + \bar{u}_2 + \frac{k_3}{k_2}\bar{u}_3 + \cdots + \frac{k_n}{k_2}\bar{u}_n = \bar{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{u}_2 = -\frac{k_1}{k_2}\bar{u}_1 - \frac{k_3}{k_2}\bar{u}_3 - \cdots - \frac{k_n}{k_2}\bar{u}_n$$

och omvänt, om $\bar{u}_2 = l_1\bar{u}_1 + l_3\bar{u}_3 + \cdots + l_n\bar{u}_n$ då är

$$l_1\bar{u}_1 - \bar{u}_2 + l_3\bar{u}_3 + \cdots + l_n\bar{u}_n = \bar{0}$$

och $(*)$ har en icke-trivial lösning.

Exempel

Avgör om vektorerna $\bar{u}_1 = (0,3,1,-1)$, $\bar{u}_2 = (6,0,5,1)$ och $\bar{u}_3 = (4,-7,1,3)$ är linjärt oberoende.

Vi ska alltså undersöka om ekvationen

$$k_1\begin{pmatrix}0\\3\\1\\-1\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}6\\0\\5\\1\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}4\\-7\\1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

endast har en lösning $(k_1 = k_2 = k_3 = 0)$ eller oändligt många lösningar (parameterlösning). Genom att addera ihop vänsterledet får vi

$$\begin{pmatrix} 6k_2 + 4k_3 \\ 3k_1 - 7k_3 \\ k_1 + 5k_2 + k_3 \\ -k_1 + k_2 + 3k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

eller med räkneschema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & -7 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Om vi gausseliminerar kommer vi till slutschemat

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 13/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underset{*}{0} & 0 \end{array}\right),$$

vilket visar att vi har en parameterlösning, dvs att vektorerna är linjärt beroende.

<u>En matrisformulering av linjärt oberoende</u>

Vi vet att $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$ är linjärt oberoende omm (om och endast om) ekvationen

$$k_1 \begin{pmatrix} | \\ \bar{u}_1 \\ | \end{pmatrix} + \cdots + k_n \begin{pmatrix} | \\ \bar{u}_n \\ | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ \bar{0} \\ | \end{pmatrix}$$

har exakt en lösning $k_1 = \cdots = k_n = 0$.

Med matriser kan ekvationen sammanfattas som

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \cdots & \bar{u}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ \bar{0} \\ | \end{pmatrix}.$$

Att bestämma om $\{\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_n\}$ är linjärt oberoende är samma sak som att undersöka om ekvationssystemet

$$\left(\begin{array}{cccc|c} | & | & & | & | \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \cdots & \bar{u}_n & \bar{0} \\ | & | & & | & | \end{array}\right)$$

har exakt en lösning.

Exempel

Avgör om $\bar{u}_1 = (0,0,2,2)$, $\bar{u}_2 = (3,3,0,0)$, $\bar{u}_3 = (1,1,0,-1)$ är linjärt oberoende.

Motsvarande ekvationssystem med $\bar{u}_i$:na som kolumner blir

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Efter gausseliminering får vi slutschemat

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Systemet har exakt en lösning, dvs vektorerna är linjärt oberoende.

Exempel

Avgör om $\bar{u}_1 = (3,8,7,-3)$, $\bar{u}_2 = (1,5,3,-1)$, $\bar{u}_3 = (2,-1,2,6)$ och $\bar{u}_4 = (1,4,0,3)$ är linjärt oberoende.

Ställer vi upp ekvationssystemet

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & -1 & 4 \\ 7 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 6 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

så ser vi att systemet är kvadratiskt och vi kan avgöra om det finns exakt en lösning genom att beräkna determinanten

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & -1 & 4 \\ 7 & 3 & 2 & 0 \\ -3 & -1 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 128 \neq 0.$$

Eftersom determinanten är nollskild finns exakt en lösning, dvs vektorerna är linjärt oberoende.

Exempel

Avgör om $\bar{u}_1 = (-2,0,1)$, $\bar{u}_2 = (3,2,5)$, $\bar{u}_3 = (6,-1,1)$ och $\bar{u}_4 = (7,0,-2)$ är linjärt oberoende.

Ekvationssystemet blir

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 3 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right).$$

Eftersom vi har ett liggande homogent system så kommer vi alltid få en parameterlösning, dvs vektorerna är linjärt beroende.

Det gäller allmänt att om vi har fler vektorer än rummets dimension är de linjärt beroende.

Bas

När vi väljer ett koordinatsystem i planet väljer vi alltid två icke-parallella basvektorer eftersom vi vill att de spänner upp hela planet (och inte bara en linje). Vi väljer alltså vektorerna så att de är linjärt oberoende.

I rummet väljer vi tre icke-komplana basvektorer så att de spänner upp hela rummet, dvs vi väljer basvektorerna linjärt oberoende.

I $\mathbb{R}^n$ säger vi att n st vektorer $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n$ är en bas om de är linjärt oberoende. Vi kan då uttrycka varje vektor $\bar{v}$ som en unik linjärkombination av u_i:na,

$$\bar{v} = k_1\bar{u}_1 + k_2\bar{u}_2 + \dots + k_n\bar{u}_n$$

Talen $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ är $\bar{v}$:s koordinater i basen $\{\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n\}$.

L 3.37

Använd matriserna för BA och AB i exempel 3.26 för att visa att BA är speglingen i linjen $y=x$ och att AB är speglingen i linjen $y=-x$.

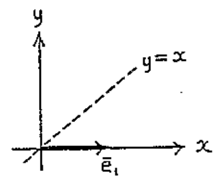
Matrisprodukterna från exempel 3.26 är

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ och } AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi ska ta fram matriserna för speglingarna i $y=x$ och $y=-x$ och visa att de matriserna är lika med BA respektive AB.

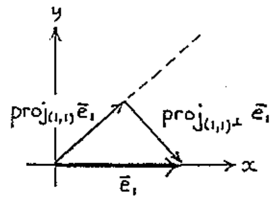
Spegling i $y=x$

Standardmetoden för att bestämma speglingsmatrisen är att undersöka hur de två basvektorerna $\bar{e}_1$ och $\bar{e}_2$ speglas. Vi börjar med $\bar{e}_1$.



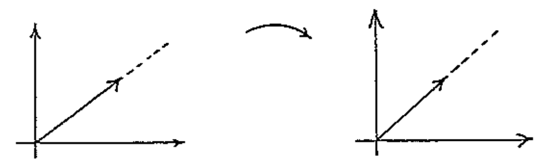
L 3.37 forts.

För att lättare se hur $\bar{e}_1$ speglas delar vi upp den i en komposant parallell med riktningen $(1,1)$ hos linjen $y=x$ och en komposant vinkelrät mot $(1,1)$, d.v.s.

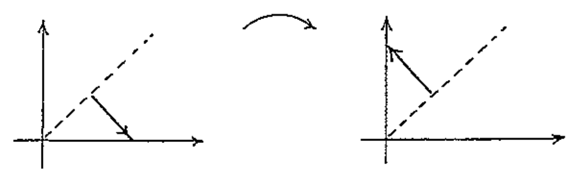


$$\bar{e}_1 = \mathrm{proj}_{(1,1)}\bar{e}_1 + \mathrm{proj}_{(1,1)^\perp}\bar{e}_1$$

Det är nu enkelt att se hur komposanterna speglas



$$\mathrm{proj}_{(1,1)}\bar{e}_1 \longmapsto \mathrm{proj}_{(1,1)}\bar{e}_1$$



$$\mathrm{proj}_{(1,1)^\perp}\bar{e}_1 \longmapsto -\mathrm{proj}_{(1,1)^\perp}\bar{e}_1$$

L 3.37
forts 2

Basvektorn $\bar{e}_1$ avbildas alltså på

$$\bar{e}_1 \mapsto \text{proj}_{(1,1)}\bar{e}_1 - \text{proj}_{(1,1)\perp}\bar{e}_1$$

Med siffror får vi

$$\text{proj}_{(1,1)}\bar{e}_1 = \frac{(1,0)\cdot(1,1)}{|(1,1)|^2}(1,1) = \frac{1+0}{1^2+1^2}(1,1)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right),$$

$$\text{proj}_{(1,1)\perp}\bar{e}_1 = \bar{e}_1 - \text{proj}_{(1,1)}\bar{e}_1$$

$$= (1,0) - \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) = \left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right)$$

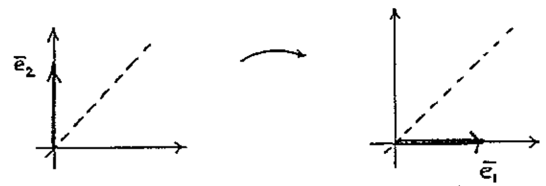
och

$$\text{proj}_{(1,1)} e_1 - \text{proj}_{(1,1)\perp} e_1$$

$$= \left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\right) - \left(\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\right) = (0,1) = e_2$$

Basvektorn $\bar{e}_1$ avbildas alltså på $\bar{e}_2$.

Av symmetriskäl ser vi att $\bar{e}_2$ måste avbildas på $\bar{e}_1$



L 3.37
forts. 3

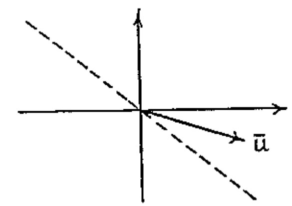
En spegling i $y=x$ har därmed matrisen

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

vilken är lika med BA och visar att resultatet av sammansättningen är denna spegling.

Spegling i $y = -x$

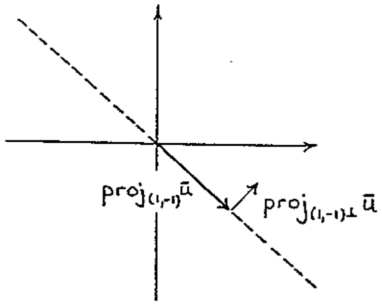
Istället för att titta på hur basvektorerna speglas väljer vi en godtycklig vektor $\bar{u} = (u_1, u_2)$ och ser hur den speglas.



Vi delar upp vektorn i en komposant parallell med speglingslinjens riktning $(1,-1)$ och en

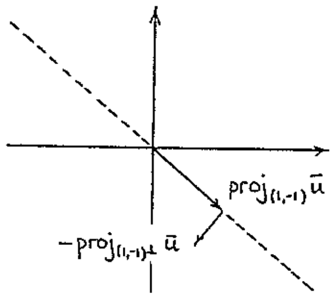
L3.37
forts. 4

komposant vinkelrät mot riktningen $(1,-1)$,



$$\bar{u} = proj_{(1,-1)}\bar{u} + proj_{(1,-1)^\perp}\bar{u},$$

Spegelvektorn är då



$$S(\bar{u}) = proj_{(1,-1)}\bar{u} - proj_{(1,-1)^\perp}\bar{u}$$
$$= proj_{(1,-1)}\bar{u} - (\bar{u} - proj_{(1,-1)}\bar{u})$$
$$= 2\, proj_{(1,-1)}\bar{u} - \bar{u}$$
$$= 2\,\frac{(u_1,u_2)\cdot(1,-1)}{1^2+(-1)^2}(1,-1) - (u_1,u_2)$$

L3.37
forts. 5

$$= 2\,\frac{u_1-u_2}{2}(1,-1) - (u_1,u_2)$$
$$= (u_1-u_2-u_1,\ -(u_1-u_2)-u_2)$$
$$= (-u_2,-u_1)$$

Vektorn (u_1,u_2) speglas alltså på vektorn $(-u_2,-u_1)$,

$$S(u) = \begin{pmatrix}-u_2\\-u_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}.$$

En spegling i $y=-x$ har därmed matrisen

$$\begin{pmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{pmatrix}$$

vilken är lika med AB och visar att resultatet av sammansättningen är en spegling i $y=-x$.

L3.40

Om A är en avbildning av planet eller rymden på sig självt så definierar man för heltal $n>0$,

$$A^n = \underbrace{A \cdots A}_{n \text{ st}}.$$

Låt $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Beräkna A^2, A^3 och A^4. Tolka resultatet geometriskt.

b) Bestäm A^n för godtyckliga heltal n.

---

a) Vi får

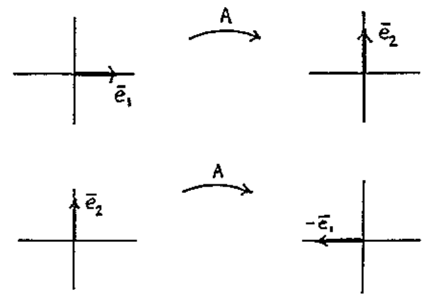
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

L3.40 forts.

Om vi tittar geometriskt så ser vi i A:s kolumner att avbildning som har matrisen A avbildar basvektorerna $\bar{e}_1 = (1,0)$ och $\bar{e}_2 = (0,1)$ på $\bar{e}_2$ resp. $-\bar{e}_1$.



Av denna beskrivning ser vi att avbildningen är en vridning med vinkeln $\pi/2$ moturs.

Matrisen A^2 svarar då mot en sammansättning av vridningen med sig själv, dvs en vridning $\pi/2$ följt av en vridning $\pi/2$. Med andra ord är A^2 en vridning med vinkeln π moturs.

På samma sätt fås att $A^3 = AAA$ är en vridning med vinkeln $3\pi/2$ moturs, och att A^4 är en

L 3.40 forts. 2

vridning ett helt varv.

b) Av den geometriska beskrivningen av A ser vi att efter fyra sammansättningar har vi vridit tillbaka till utgångsläget.
Det betyder att

- $A = A^5 = A^9 = A^{13} = \cdots$
- $A^2 = A^6 = A^{10} = A^{14} = \cdots$
- $A^3 = A^7 = A^{11} = A^{15} = \cdots$
- $A^4 = A^8 = A^{12} = A^{16} = \cdots$

Vi kan sammanfatta detta som

$$A^n = \begin{cases} E, & \text{om } n = 4k \text{ för något heltal } k, \\ A, & \text{om } n = 4k+1 \text{ för något heltal } k, \\ A^2, & \text{om } n = 4k+2 \text{ för något heltal } k, \\ A^3, & \text{om } n = 4k+3 \text{ för något heltal } k. \end{cases}$$

L 3.43

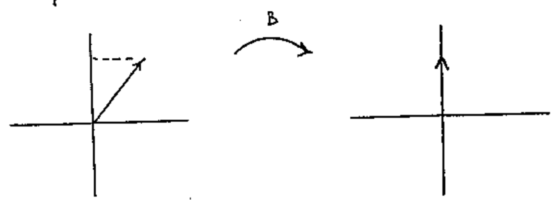
Ge exempel på två linjära avbildningar A och B i planet sådana att

$$AB = 0 \quad \text{men} \quad BA \neq 0,$$

där 0 är nollmatrisen $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Låt oss först lösa ett enklare problem: Bestäm två linjära avbildningar $A \neq 0$ och $B \neq 0$ så att $AB = 0$.

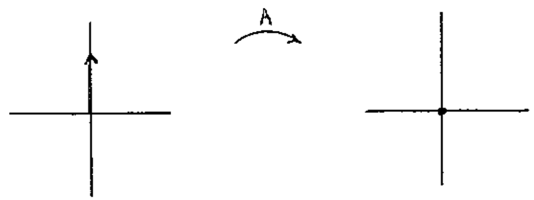
Idéen är följande, låt B vara en projektion på y-axeln. Då plattar vi till alla vektorer så att de är parallella med y-axeln.



Sedan låter vi A vara en projektion på x-axeln.

L3.43 forts.

Alla vektorer parallella med y-axeln kommer då projiceras ner på nollvektor.



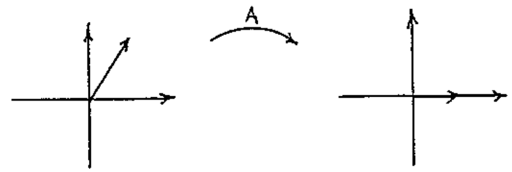
Nettoresultatet blir att sammansättningen AB avbildar alla vektorer på nollvektorn, dvs $AB = 0$.

Problemet med denna konstruktion är att även $BA = 0$ (projicera först på x-axeln och sedan på y-axeln resulterar också i nollvektorn).

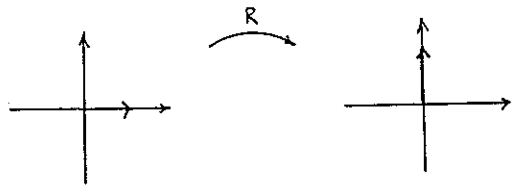
En lösning på problemet är att betrakta en sammansättning av typen $A \cdot RA$, där A är som tidigare och R är en rotation med vinkeln $\pi/2$ moturs.

L3.43 forts. 2

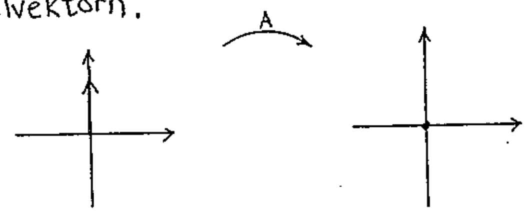
Vi får då nämligen att A först projicerar ner vektorn på x-axeln,



R vrider upp vektorn till y-axeln,



och A projicerar ner vektorn till nollvektorn.

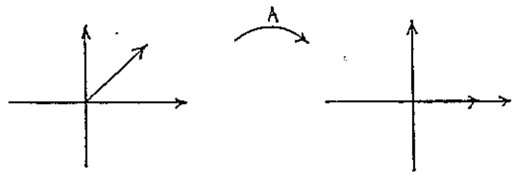


Alltså är $A \cdot RA = 0$.

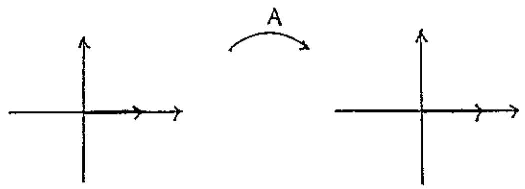
Om vi behandlar RA som en linjär avbildning och byter plats på avbildningarna $RA \cdot A$. Då får vi

L 3.43 forts. 3

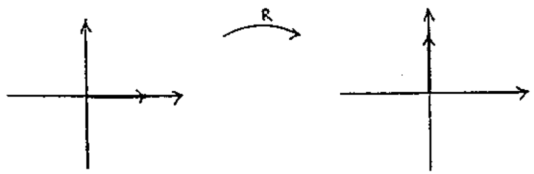
att A projicerar på x-axeln,



A projicerar ytterligare en gång på x-axeln (vilket inte förändrar något),



och R vrider upp vektorn till y-axeln,



Vi har därmed att $RA \cdot A \neq 0$.

Om vi väljer

$A =$ projektion på x-axeln $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$B =$ projektion på x-axeln följt av en rotation med vinkeln $\pi/2$ moturs

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L 3.43 forts. 4

Då är

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

medan

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

L3.44

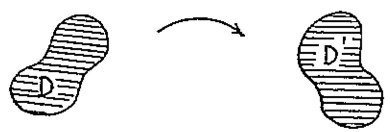
Ett visst område D i planet har arean 2 a.e., det avbildas linjärt på ett område D',
Vilken area har D' om matrisen för avbildningen är

a) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 11 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$, respektive

c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 15 \end{pmatrix}$?

Sambandet mellan arean av D och arean av bildområdet D',



är

$$\text{area}(D') = |\det A| \cdot \text{area}(D),$$

där A är matrisen för den linjära avbildningen.

L3.44 forts.

I de tre fallen har vi

a) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot 11 - 3 \cdot 4 = -1,$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 12 \end{vmatrix} = 1 \cdot 12 - 3 \cdot 4 = 0,$

c) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 15 \end{vmatrix} = 1 \cdot 15 - 3 \cdot 4 = 3.$

Bildområdets area är därför

a) $\text{area}(D') = |-1| \cdot \text{area}(D) = 1 \cdot 2 = 2,$

b) $\text{area}(D') = |0| \cdot \text{area}(D) = 0,$

c) $\text{area}(D') = |3| \cdot \text{area}(D) = 3 \cdot 2 = 6.$

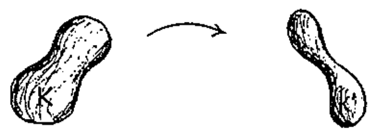
L3.45

En kropp K i rymden avbildas linjärt på kroppen K' med volym 3 v.e. Vilken volym har kroppen K om avbildningens matris är

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Sambandet mellan volymen av K och volymen av bildkroppen K',



är

$$\text{volym}(K') = |\det A| \cdot \text{volym}(K),$$

där A är matrisen för den linjära avbildningen.

L 3.45 forts.

Vi har

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

$= +6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -6,$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 7 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -13 & -20 \end{vmatrix}$

$= 1 \cdot \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ -13 & -20 \end{vmatrix} = 34.$

Detta ger att

a) $\text{volym}(K') = 6 \cdot \text{volym}(K)$

$\Leftrightarrow \text{volym}(K) = \frac{1}{6}\,\text{volym}(K') = 1/2,$

b) $\text{volym}(K') = 34 \cdot \text{volym}(K)$

$\Leftrightarrow \text{volym}(K) = \frac{1}{34}\,\text{volym}(K') = 3/34.$

L 4.8a

Avgör om vektorerna

$(1,2,3,4)$, $(-1,3,0,2)$ och $(6,7,0,5)$

är linjärt beroende eller ej.

Vi kallar vektorerna för

$\bar{v}_1 = (1,2,3,4)$,

$\bar{v}_2 = (-1,3,0,2)$,

$\bar{v}_3 = (6,7,0,5)$.

De tre vektorerna är linjärt beroende om en av dem kan skrivas som en linjärkombination av de andra två, d.v.s. om

$$\bar{v}_1 = a\,\bar{v}_2 + b\,\bar{v}_3,$$

eller

$$\bar{v}_2 = c\,\bar{v}_1 + d\,\bar{v}_3,$$

eller

$$\bar{v}_3 = e\,\bar{v}_1 + f\,\bar{v}_2$$

L 4.8 forts.

Ett sätt att undersöka alla tre fall på en gång är att ställa upp sambandet

$$k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + k_3\bar{v}_3 = \bar{0} \qquad (*)$$

och se om det finns någon lösning k_1, k_2, k_3 som inte är trivial (dvs en lösning där inte alla k_1, k_3 och k_3 är noll).

Om det t.ex. finns en lösning där $k_2 \neq 0$ då kan vi nämligen dividera båda led i (*) med k_2 och få

$$\frac{k_1}{k_2}\bar{v}_1 + \bar{v}_2 + \frac{k_3}{k_2}\bar{v}_3 = \bar{0}$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{v}_2 = -\frac{k_1}{k_2}\bar{v}_1 - \frac{k_3}{k_2}\bar{v}_3,$$

men om $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ kan vi inte skriva en vektor som en linjärkombination av de andra vektorerna.

L 4.8a
forts. 2

Det hela handlar alltså om att bestämma lösningarna till

$$k_1\bar{v}_1 + k_2\bar{v}_2 + k_3\bar{v}_3 = \bar{0}\,.$$

Med siffror insatta kan vi uttrycka ekvationen som

$$k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}6\\7\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

eller

$$\begin{pmatrix}k_1 - k_2 + 6k_3\\2k_1 + 3k_2 + 7k_3\\3k_1\\4k_1 + 2k_2 + 5k_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Detta är ett linjärt ekvationssystem som vi kan lösa med gausseliminering

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 6 & 0\\2 & 3 & 7 & 0\\3 & 0 & 0 & 0\\4 & 2 & 5 & 0\end{array}\right) \begin{matrix}-2 & -3 & -4\end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 6 & 0\\0 & 5 & -5 & 0\\0 & 3 & -18 & 0\\0 & 6 & -19 & 0\end{array}\right) \begin{matrix}1/5\end{matrix} \sim$$

L 4.8a
forts. 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 6 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 3 & -18 & 0\\0 & 6 & -19 & 0\end{array}\right) \begin{matrix}-3 & -6 & +\end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 5 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & -15 & 0\\0 & 0 & -13 & 0\end{array}\right) \begin{matrix}\div(-15)\end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 5 & 0\\0 & 1 & -1 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & -13 & 0\end{array}\right) \begin{matrix}13 & + & -5\end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

Nu kan vi avläsa att lösningen är

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0,$$

vilket betyder att vektorerna inte är linjärt beroende, dvs vektorerna är linjärt oberoende.

L4.8b

Avgör om vektorerna
$(1,2,3,4)$, $(-1,3,0,2)$ och $(6,-8,6,0)$
är linjärt beroende eller ej.

<u>Metod 1</u> (med determinanter)

Om vektorerna $\bar{v}_1 = (1,2,3,4)$, $\bar{v}_2 = (-1,3,0,2)$ och $\bar{v}_3 = (6,-8,6,0)$ är linjärt beroende då spelar det ingen roll om vi lägger till en fjärde vektor $\bar{v}_4$. Samlingen $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ är fortfarande linjärt beroende (eftersom $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ är det).

Om å andra sidan $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ och $\bar{v}_3$ är linjärt oberoende och vi lägger till en fjärde vektor $\bar{v}_4$ som inte är en linjärkombination av $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$, då är samlingen $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ fortfarande linjärt oberoende.

L4.8b forts.

Anledningen till att vi vill lägga till en fjärde vektor $\bar{v}_4$ är att om vi har fyra vektor i $\mathbb{R}^4$ så kan vi avgöra om de är linjärt beroende med determinantvillkoret

$$\det \begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 & \bar{v}_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} = 0$$

$\Leftrightarrow$ $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ är linjärt beroende.

Sätter vi $\bar{v}_4$ till en godtycklig vektor $\bar{v}_4 = (a,b,c,d)$ och determinanten blir noll oavsett hur vi väljer a,b,c och d, då måste $\bar{v}_1, \bar{v}_2$ och $\bar{v}_3$ vara linjärt beroende. Är däremot determinanten skild från noll för vissa a,b,c och d, då är $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3, \bar{v}_4\}$ linjärt oberoende (för $\bar{v}_4$ med dessa a,b,c,d) vilket speciellt betyder att $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ är linjärt oberoende.

L 4.8b
forts. 2

I vårt fall blir determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 & a \\ 2 & 3 & -8 & b \\ 3 & 0 & 6 & c \\ 4 & 2 & 0 & d \end{vmatrix}.$$

Kofaktorutveckla längs fjärde kolumnen

$$-a\begin{vmatrix} 2 & 3 & -8 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} + b\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-c\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & -8 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & -8 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix}.$$

Om detta uttryck ska vara noll för alla värden på a, b, c och d då måste de fyra minorerna alla vara noll.

Vi beräknar minorernas värden,

- $$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -8 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \{\text{Sarrus}\} = 2\cdot 0\cdot 0 + 3\cdot 6\cdot 4 + (-8)\cdot 3\cdot 2 - (-8)\cdot 0\cdot 4 - 2\cdot 6\cdot 2 - 3\cdot 3\cdot 0 = 0 + 72 - 48 - 0 - 24 - 0 = 0,$$

L 4.8b
forts. 3

- $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 6 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 6\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6\cdot(2\cdot 2 - 1\cdot 4) = 0,$$

- $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & -8 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \{\text{Sarrus}\} = 1\cdot 3\cdot 0 + (-1)\cdot(-8)\cdot 4 + 6\cdot 2\cdot 2 - 6\cdot 3\cdot 4 - 1\cdot(-8)\cdot 2 - (-1)\cdot 2\cdot 0 = 0 + 32 + 24 - 72 + 16 - 0 = 0,$$

- $$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 6 \\ 2 & 3 & -8 \\ 3 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & -12 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -12 \end{vmatrix} = 3\cdot((-1)\cdot(-12) - 4\cdot 3) = 0.$$

Alltså är determinanten lika med

$$-a\cdot 0 + b\cdot 0 - c\cdot 0 + d\cdot 0 = 0$$

oavsett hur vi väljer a, b, c och d.

De tre vektorerna $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ och $\bar{v}_3$ är linjärt beroende.

Metod 2 (med gausseliminering)

Vi kan avgöra om vektorerna är linjärt beroende eller inte genom att undersöka vilka lösningar ekvationen

$$k_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}-1\\3\\0\\2\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}6\\-8\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

har; Om det bara finns den triviala lösningen $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ är vektorerna linjärt oberoende, och om vi har en parameterlösning är vektorerna linjärt beroende.

Om vi skriver ekvationen med matriser får vi

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 6\\2 & 3 & -8\\3 & 0 & 6\\4 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

(Notera att den första kolumnen, som svarar mot k_1, är lika med vektorn som hör ihop med k_1 och motsvarande gäller andra och tredje kolumnen.)

För att lösa systemet gausseliminerar vi,

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 6 & 0\\2 & 3 & -8 & 0\\3 & 0 & 6 & 0\\4 & 2 & 0 & 0\end{array}\right) \begin{matrix}-2 & -3 & -4\end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 6 & 0\\0 & 5 & -20 & 0\\0 & 3 & -12 & 0\\0 & 6 & -24 & 0\end{array}\right) \frac{1}{5} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 6 & 0\\0 & 1 & -4 & 0\\0 & 3 & -12 & 0\\0 & 6 & -24 & 0\end{array}\right) \begin{matrix}-3 & -6 & +\end{matrix} \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 2 & 0\\0 & 1 & -4 & 0\\0 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & \underset{*}{0} & 0\end{array}\right)$$

Eftersom detta system har en parameterlösning (dvs icke-triviala lösningar) är vektorerna linjärt beroende.

L 4.9

Verifiera att vektorerna $\bar{u}_1 = (1,2,1,1)$, $\bar{u}_2 = (1,-3,-1,0)$ och $\bar{u}_3 = (12,-1,2,7)$ är linjärt beroende. Uttryck $\bar{u}_2$ som en linjär kombination av $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_3$.

Vektorerna $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ och $\bar{u}_3$ är linjärt beroende om ekvationen

$$k_1\bar{u}_1 + k_2\bar{u}_2 + k_3\bar{u}_3 = \bar{0}$$

har icke-triviala lösningar k_1, k_2, k_3.

Om vi översätter ekvationen till matrisform får vi

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ \bar{0} \\ | \end{pmatrix}$$

eller med siffror

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 12 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L 4.9 forts.

Vi gausseliminerar,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 12 & 0 \\ 2 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right) (-2)\,(-) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 12 & 0 \\ 0 & -5 & -25 & 0 \\ 0 & -2 & -10 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right) (-1/5) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 12 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -2 & -10 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & 0 \end{array}\right) (2)\,(+)\,(-) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
$$\qquad\qquad *$$

Inför vi k_3 som parameter har vi lösningen

$$\begin{cases} k_1 = -7t \\ k_2 = -5t \\ k_3 = t \end{cases} \qquad (t \text{ parameter}),$$

vilket betyder att

$$-7t\,\bar{u}_1 - 5t\,\bar{u}_2 + t\,\bar{u}_3 = \bar{0}$$

för alla värden på t.

L4.9 forts. 2

Väljer vi ett värde på t, t.ex. t=1, får vi

$$-7\bar{u}_1 - 5\bar{u}_2 + \bar{u}_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{u}_2 = -\frac{7}{5}\bar{u}_1 + \frac{1}{5}\bar{u}_3 .$$

L4.10

För vilka a-värden utgör $\{(1,1,1,a), (1,1,a,1), (1,a,1,1), (a,1,1,1)\}$ en bas i $\mathbb{R}^4$?

Vektorerna bildar en bas för $\mathbb{R}^4$ om två villkor är uppfyllda

1) deras antal är lika med rummets dimension, dvs 4, och

2) de är linjärt oberoende.

Punkt 1 är uppfylld. För att punkt 2 ska vara uppfylld ska ekvationen

$$k_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\\a\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}1\\1\\a\\1\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}1\\a\\1\\1\end{pmatrix} + k_4\begin{pmatrix}a\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

bara ha den triviala lösningen

$$k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0 .$$

L 4.10 forts.

I matrisform blir ekvationen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ k_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ett villkor för att detta system ska ha exakt en lösning är att koefficientmatrisens determinant är skild från noll. Vi beräknar därför determinanten

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \ominus \; (-a) \end{matrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{vmatrix}$$

$= \{$kofaktorutveckla första kolumnen$\}$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & a-1 & 1-a \\ a-1 & 0 & 1-a \\ 1-a & 1-a & 1-a^2 \end{vmatrix} \oplus$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & a-1 & 1-a \\ a-1 & 0 & 1-a \\ 0 & 1-a & 2-a-a^2 \end{vmatrix}$$

L 4.10 forts. 2

$= \{$kofaktorutveckla första kolumnen$\}$

$$= -(a-1)\begin{vmatrix} a-1 & 1-a \\ 1-a & 2-a-a^2 \end{vmatrix} \oplus$$

$$= -(a-1)\begin{vmatrix} a-1 & 1-a \\ 0 & 3-2a-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= -(a-1)^2(3-2a-a^2)$$

Vi ser att determinanten är skild från noll om

$$a-1 \neq 0 \quad \text{och} \quad 3-2a-a^2 \neq 0$$

dvs

$$a \neq -3 \quad \text{och} \quad a \neq 1.$$

Svaret är alltså att vektorerna är en bas om $a \neq -3$ och $a \neq 1$.

L 4.11

Visa att $\{(1,1,1,2), (0,1,2,3), (-1,0,1,2), (-1,0,4,0)\}$ utgör en bas i $\mathbb{R}^4$. Bestäm koordinaterna för vektorn $(1,1,1,-1)$ i den nya basen.

Vi döper vektorerna till

$$\bar{u}_1 = (1,1,1,2), \quad \bar{u}_2 = (0,1,2,3),$$
$$\bar{u}_3 = (-1,0,1,2), \quad \bar{u}_4 = (-1,0,4,0),$$
$$\bar{v} = (1,1,1,-1).$$

Om vi tittar på vad som behöver göras är det att

- först visa att ekvationen

$$k_1\bar{u}_1 + k_2\bar{u}_2 + k_3\bar{u}_3 + k_4\bar{u}_4 = \bar{0}$$

endast har den triviala lösningen $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$, för att visa att vektorerna är linjärt oberoende och därmed bildar en bas,

- sedan lösa ekvationen

$$\bar{v} = c_1\bar{u}_1 + c_2\bar{u}_2 + c_3\bar{u}_3 + c_4\bar{u}_4,$$

för att bestämma $\bar{v}$:s koordinater (c_1, c_2, c_3, c_4) i basen $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_5\}$.

L 4.11 forts.

De två ekvationerna vi ska lösa

$$k_1\bar{u}_1 + k_2\bar{u}_2 + k_3\bar{u}_3 + k_4\bar{u}_4 = \bar{0}$$
$$c_1\bar{u}_1 + c_2\bar{u}_2 + c_3\bar{u}_3 + c_4\bar{u}_4 = \bar{v}$$

har samma vänsterled och kommer ha samma typ av lösningsmängd (exakt en lösning eller parameterlösning) så det räcker med att vi löser den andra ekvationen. Om den andra ekvationen har exakt en lösning då visar det samtidigt att den första ekvationen har exakt en lösning.

Den andra ekvationen blir i matrisform

$$\begin{pmatrix} | & | & | & | \\ \bar{u}_1 & \bar{u}_2 & \bar{u}_3 & \bar{u}_4 \\ | & | & | & | \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} | \\ \bar{v} \\ | \end{pmatrix}$$

dvs

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

L 4.11
forts. 2

Vi löser systemet med gausseliminering

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Därmed har vi visat att $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ är en bas och att vektorn $\bar{v}$ har koordinaterna $(2,-1,1,0)$ i den basen.

L 4.14

En linjär avbildning av typen $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ har (med avseende på standardbasen) matrisen

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vilka är bilderna av vektorerna $(1,0,0,0)$, $(0,0,0,1)$ och $(1,1,-2,2)$?

Bildvektorerna blir

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 7 & -1 & 5 & 4 \\ 5 & 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L4.15

Mellan variablerna (x_1, x_2, x_3, x_4) och (y_1, y_2, y_3) råder de linjära sambanden

$$\begin{cases} y_1 = 3x_1 + x_2 - x_3 \\ y_1 + y_3 = x_1 - x_2 + x_4 \\ y_1 + y_2 + y_3 = x_2 - x_3 \end{cases}$$

Uttryck (y_1, y_2, y_3) i (x_1, x_2, x_3, x_4) och ange matrisen för motsvarande linjära avbildning.

<u>Metod 1</u> (med gausseliminering)

Vi ser sambanden mellan x- och y-variablerna som ett ekvationssystem där vi ska lösa ut y_i:na i termer av x_j:na. Vi gausseliminerar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3x_1 + x_2 - x_3 \\ 1 & 0 & 1 & x_1 - x_2 + x_4 \\ 1 & 1 & 1 & x_2 - x_3 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3x_1 + x_2 - x_3 \\ 0 & 0 & 1 & -2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \\ 0 & 1 & 1 & -3x_1 \end{array}\right) \sim$$

L4.15 forts.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3x_1 + x_2 - x_3 \\ 0 & 1 & 1 & -3x_1 \\ 0 & 0 & 1 & -2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3x_1 + x_2 - x_3 \\ 0 & 1 & 0 & -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 \\ 0 & 0 & 1 & -2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 \end{array}\right)$$

Alltså har vi

$$\begin{cases} y_1 = 3x_1 + x_2 - x_3, \\ y_2 = -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4, \\ y_3 = -2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4. \end{cases}$$

Skriver vi detta med matriser

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

ser vi att den linjära avbildning som tar (x_1, x_2, x_3, x_4) till (y_1, y_2, y_3) har matrisen

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

L 4.15 forts. 2

Metod 2 (med matriser)

Om vi skriver sambandet med matriser

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Så ser vi att y-vektorn är lika med

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

Det återstår nu bara att räkna. Inversen bestämmer vi med den vanliga metoden

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \ominus \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \ominus \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

L 4.15 forts. 3

dvs

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vi får nu

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

och vi kan avläsa matrisen för den linjära avbildning som tar x_j:na till y_i:na till

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$