SF1620 Matematik och modeller

2007-10-01

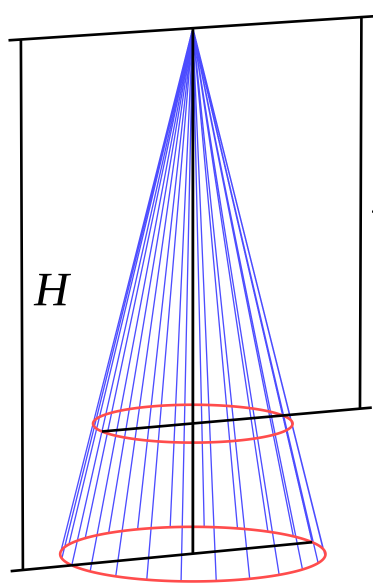
5 Femte veckan — Integraler

5.1 Primitiva funktioner

Vi har sett tidigare att vissa funktioner, $f(x)$, har *primitiva funktioner*, dvs en funktion, $F(x)$, vars derivata $F'(x) = f(x)$. Om $F(x)$ är en primitiv funktion är $F(x) + C$ också en primitiv funktion för alla konstanter C, eftersom derivatan av en konstant alltid är noll.

Exempel

Om vi ser på en cirkulär kon med bottenradie R och höjd H kan vi se på volymen av den delkon som har höjd x som en funktion $V(x)$.



Om vi deriverar funktionen $V(x)$ får vi

$$V'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h}.$$

Vi kan tolka $V(x+h) - V(x)$ som volymen av en skiva med tjocklek h. Om $A(x)$ är konens tvärsnittsarea på avstånd x från toppen får vi att

$$A(x)h < V(x+h) - V(x) < A(x+h)h$$

och därmed är

$$A(x) < \frac{V(x+h) - V(x)}{h} < A(x+h).$$

När vi låter $h > 0$ krympa mot noll får vi att

$$V'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h} = A(x).$$

Eftersom vi nu vet att

$$A(x) = \pi \left(\frac{Rx}{H} \right)^2$$

måste vi leta efter en primitiv funktion till x^2. Vi vet att vi får $3x^2$ när vi deriverar x^3, och därmed får vi x^2 när vi deriverar $x^3/3$. Enligt våra uträkningar är $V(x)$ en primitiv funktion till

$$A(x) = \pi \frac{R^2}{H^2} x^2$$

och alltså måste

$$V(x) = \pi \frac{R^2}{H^2} \frac{x^3}{3} + C$$

för någon konstant C. Nu vet vi också att $V(0) = 0$, vilket ger $C = 0$ och vi får hela konens volym som

$$V(H) = \pi \frac{R^2}{H^2} \frac{H^3}{3} = \frac{\pi R^2 H}{3}.$$

5.2 Integraler

Om vi har en funktion $f(x)$ med en primitiv funktion $F(x)$ kan vi låta

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

och vi kan tolka detta uttryck som arean mellan grafen för $f(x)$ på intervallet $a \leq x \leq b$ och x-axeln. Vi skriver ofta också

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Exempel

Vi har enligt ovan att $x^3/3$ är en primitiv funktion till x^2 och därmed

$$\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

Tolkningen av detta som en areaberäkning ger att arean av området mellan x-axeln och kurvan $y = x^2$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ är $1/3$.

5.3 Rotationsvolymer

Om vi ser tillbaka på exemplet med konen ser vi att vi egentligen inte använt oss av att det är fråga om en cirkulär kon annat än när vi har beräknat $A(x)$. Vi får i vilket fall som helst att

$$V'(x) = A(x)$$

där $A(x)$ är tvärsnittsarean på avstånd x från toppen. Vi har därför att

$$V(H) = V(H) - V(0) = \int_0^H A(x)\,dx.$$

Om vi istället hade haft en rotationskropp som fås genom att rotera en kurva $y = f(x)$ runt x-axeln, hade tvärsnittsarean varit given av

$$A(x) = \pi f(x)^2$$

och volymen blir

$$V(H) = \int_0^H \pi f(x)^2\,dx.$$

Om vi exempelvis ser ett klot som att kurvan $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ roterar kring x-axeln på intervallet $-r \le x \le r$ får vi

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} \pi(\sqrt{r^2 - x^2})^2\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx = \pi\left[xr^2 - \frac{x^3}{3}\right]_{-r}^{r} \\ &= \pi r^3 - \pi\frac{r^3}{3} - \pi(-r^3) + \pi\frac{(-r)^3}{3} = \pi\frac{3r^3 - r^3 + 3r^3 - r^3}{3} = \frac{4\pi r^3}{3} \end{aligned}$$

5.4 Differenser och summor

Vi kan jämföra sambandet mellan derivata och integral med sambandet mellan differenser och summor. Om vi har en följd av tal, exempelvis

$$0, 1, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24$$

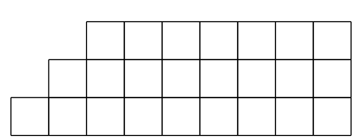
kan vi bilda *differenser*, eller *skillnader*, genom $1 - 0 = 1$, $3 - 1 = 2$, $6 - 3 = 3$, osv och får en ny följd

$$1, 2, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3$$

Här är det klart att om vi kommer ihåg det första talet i den första följden, och sedan bara differenserna, kan vi få tillbaka hela den första följden genom att summera:

$$1 = 1, \qquad 1+2 = 3, \qquad 1+2+3 = 6, \qquad 1+2+3+3 = 9, \qquad 1+2+3+3+3 = 12, \ldots$$

Ritar vi upp det med rutor får vi



Vi kan nu tolka den första följden som antalet rutor till vänster om en viss linje.

5.5 Partiell integration

Det finns inga metoder som alltid fungerar för att finna primitiva funktioner, eller till att beräkna bestämda integraler. Däremot finns några tekniker som kan användas för att i de fall det går omforma problemet till ett enklare problem.

Ett sådant är *partiell integration*, som är ett slags omvändning av produktregeln vid derivering. Som vi vet är derivatan av en produkt, $h(x) = f(x)g(x)$, given av

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Om vi nu står inför att finna en primitiv funktion till en produkt $f(x)g(x)$ och redan känner en primitiv funktoin, $F(X)$, till $f(x)$ kan vi försöka vända på sambandet och få

$$f(x)g(x) = F'(x)g(x) = (F(x)g(x))' - F(x)g'(x)$$

Eftersom vi nu ser att $F(X)g(x)$ är en primitiv funktion till den första termen kan vi finna en primitiv funktion till $f(x)g(X)$ om vi också kan finna en primitiv funktion till $F(x)g'(x)$. Vår förhoppning är att detta problem i någon mening är lättare än det ursprungliga.

Exempel

Om vi är intresserade av att beräkna

$$\int_0^\pi x \sin x \, dx$$

kan vi först finna en primitiv funktion till $\sin x$, som ges av $-\cos x$, och därmed få

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x \sin x \, dx &= [x(-\cos x)]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot (-\cos x) \, dx \\ &= \pi(-(-1)) - 0 \cdot (-1) + [\sin x]_0^\pi = \pi + 0 - 0 = \pi.\end{aligned}$$

Här blev det senare problemet enklare för att funktionen inte längre är en produkt av ett polynom med en trigonometrisk funktion utan en ren trigonometrisk funktion vars primitiva funktion vi väl kände till. Så behöver det inte alltid bli på en gång. Ibland kan man behöva upprepa proceduren flera gånger.

Övning 1 *Använd partiell integration för att beräkna integralerna*

$$a) \quad \int_0^1 x e^{-x} \, dx \qquad och \qquad b) \quad \int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx.$$

Övning 2 *Använd partiell integration för att beräkna integralerna*

$$a) \quad \int_0^\pi x^2 \sin x \, dx \qquad och \qquad b) \quad \int_0^\pi x^2 \cos x \, dx.$$

5.6 Variabelbyte

Vi har sett att man ibland kan använda produktregeln baklänges och få en metod för att integrera en produkt. På samma sätt kan vi ibland använda kedjeregeln baklänges för att integrera en sammansatt funktion.

Antag att vi vill integrera utföra en integral är integranden skulle se lättare ut om vi uttryckte den oberoende variabeln x som en funktion i en annan variabel t, dvs $x = g(t)$. Vi behöver då se hur kejderegeln skulle kunna användas. Om nu $F(x)$ var en primitiv funktion till $f(x)$ skulle vi ha att

$$(F(g(t)))' = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$$

Om vi ivll använda detta kan vi integrera båda sidor och får då

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d (F(g(t)))'\,dt = \int_c^d f(g(t))g'(t)\,dt$$

Det betyder att vi kan tänka oss att vi har gjort följande förändringar

$$\begin{cases} x &= g(t) \\ dx &= g'(t)dt \\ a &= g(c) \\ b &= g(d) \end{cases}$$

Exempel

För att beräkna

$$\int_a^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$$

för positiva värden på a kan det vara intressant att göra variabelbytet

$$x = \sqrt{r^2 - t^2}.$$

När vi deriverar $\sqrt{r^2 - t^2}$ får vi

$$\frac{-2t}{2\sqrt{r^2 - t^2}}$$

och därmed leder variabelbytet till

$$\begin{cases} x &= g(t) = \sqrt{r^2 - t^2} \\ dx &= g'(t)\,dt = -t/\sqrt{r^2 - t^2}\,dt \\ a &= g(\sqrt{r^2 - a^2}) \\ r &= g(0) \end{cases}$$

vilket gör att

$$\begin{aligned} \int_a^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx &= \int_{\sqrt{r^2-a^2}}^0 \sqrt{r^2 - t^2} \cdot t \cdot \frac{-t}{\sqrt{r^2 - t^2}}\,dt \\ &= \int_{\sqrt{r^2-a^2}}^0 -t^2\,dt = \left[-\frac{t^3}{3}\right]_{\sqrt{r^2-a^2}}^0 = \frac{1}{3}(r^2 - a^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

Vi kan också göra variabelbytet $x = \sqrt{t}$ och får då

$$\begin{cases} x &= g(t) = \sqrt{t} \\ dx &= g'(t)\,dt = 1/(2\sqrt{t})\,dt \\ a &= g(a^2) \\ r &= g(r^2) \end{cases}$$

vilket ger

$$\begin{aligned} \int_a^r x\sqrt{r^2 - x^2}\,dx &= \int_{a^2}^{r^2} \sqrt{t}\sqrt{r^2 - t}\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt = \int_{a^2}^{r^2} \frac{1}{2}(r^2 - t)^{1/2}\,dt \\ &= \left[\frac{1}{2}\frac{-2}{3}(r^2 - t)^{3/2}\right]_{a^2}^{r^2} = \frac{1}{3}(r^2 - a^2)^{3/2}. \end{aligned}$$

Övning 3 *Använd variabelbytet $x = \sin t$ för att beräkna integralerna*

$$a) \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx \qquad och \qquad b) \quad \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx.$$

Övning 4 *Använd variabelbytet $t = \sin x$ för att beräkna integralerna*

$$a) \quad \int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx \qquad och \qquad b) \quad \int_0^{\pi/2} \cos^5 x\,dx.$$

Övning 5 *Använd variabelbytet $t = e^x$ för att beräkna integralen*

$$\int_0^{\pi/2} \frac{e^x}{1 + e^x}\,dx.$$

Uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina

Övning 5.1

a) Bestäm arean av det område som ligger mellan graferna för funktionerna $f(x) = \cos x$ och $g(x) = 1/2$ på intervallet $[0, 2\pi]$. **(4)**

b) Bestäm ett uttryck för motsvarande area om vi byter ut funktionen $g(x) = 1/2$ mot $g(x) = \cos a$, där a är en konstant med $0 \leq a \leq \pi$. **(3)**

c) Vilka värden på a ger den största, respektive minsta arean mellan graferna? **(2)**

Övning 5.2

a) Bestäm arean av området mellan graferna för funktionerna $f(x) = \cos x$ och $g(x) = \sin 2x$ på intervallet $0 \leq x \leq \pi/2$. **(4)**

b) Kurvan $y = x(1 - x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ roterar kring x-axeln och begränsar på så vis en tredimensionell kropp. Bestäm med hjälp av en integral volymen av denna rotationskropp. **(3)**

c) När ett område ovanför x-axeln roteras kring x-axeln kan volymen för den uppkomna rotationskroppen beskrivas som $2\pi rA$ där A är arean under grafen som roteras och r är avståndet från områdets tyngdpunkt till x-axeln. Bestäm tyngdpunktens höjd över x-axeln för det område som roteras i b). **(2)**

Övning 5.3

a) Bestäm volymen av den rotationskropp som uppkommer då kurvan $y = \sqrt{1 - 2x^2}$ roterar kring x-axeln på intervallet $0 \leq x \leq 1/2$. **(3)**

b) Använd partiell integration för att beräkna integralen

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx.$$

(4)

c) Beräkna integralen

$$\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{2 - x^2} dx$$

med hjälp av variabelbytet $t = 2 - x^2$. (Ledning: $2/3x\sqrt{x}$ är en primitiv funktion till $\sqrt{x}$.) **(2)**

Övning 5.4

a) Beräkna integralen
$$\int_0^{\pi} |\sin x - \cos 2x|\, dx.$$
(4)

b) Använd först variabelbytet $t = \ln x$ och sedan partiell integration för att beräkna integralen
$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx.$$
(5)

Övning 5.5

a) Bestäm arean mellan graferna för funktionerna $f(x) = e^x$ och $g(x) = e^{2x}$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$. **(4)**

b) Beräkna integralen
$$\int_0^{\pi} x \sin x\, dx$$
med hjälp av partiell integration. **(3)**

c) Använd en trapetsmetoden med fyra delintervall för att få en numerisk approximation av samma integral som i föregående deluppgift. **(2)**

Övning 5.6

a) Beräkna integralen
$$\int_0^2 f(x)^2 dx$$
där $f(x) = e^x - 1$ för alla reella x. **(3)**

b) Beräkna integralen
$$\int_0^1 (1 - x^2)e^x\, dx$$
med hjälp av partiell integration. **(3)**

c) Låt $g(t)$ vara en periodisk funktion med period T och låt a vara en reell konstant. Visa att
$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{at} f(t) dt = K \int_0^T e^{at} f(t) dt$$
för någon konstant K och bestäm denna konstant. **(3)**

Övning 5.7

a) Polynomet $p(x) = 1 - 2x^2$ är en approximation av $\cos 2x$ som är bra för små värden på x. Beräkna integralerna

$$\int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx \qquad \text{och} \qquad \int_0^{\pi/4} p(x) \, dx$$

och jämför resultaten. Hur stort blir det fel man får genom att använda approximationen? **(4)**

b) Bestäm hur stort felet blir när man använder trapetsmetoden med tre delintervall för att beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx.$$

(2)

c) Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas då området under grafen för $f(x) = \ln(x) + 1$ roterar kring x-axeln på intervallet $1 \leq x \leq e$. **(3)**

Övning 5.8

a) Kurvorna $y = e^{2x}$ och $y = e^{-2x}$ avgränsar tillsammans med linjen $x = \ln(2)$ ett område i planet. Beräkna arean av detta område. **(3)**

b) Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2 + \cos x} \, dx.$$

med hjälp av variabelbyte. **(3)**

c) Bestäm det värde på konstanten a som minimerar

$$\int_0^{\pi} (ax - \sin x)^2 \, dx.$$

(3)

Övning 5.9

a) Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av parabeln $y = 4 - x^2$ och linjen $y = 1 + 2x$. **(3)**

b) Använd variabelbytet $x = \tan t$ för att beräkna integralen

$$\int_0^{1} \frac{1}{1 + x^2} \, dx.$$

(3)

c) Beräkna arean mellan de två kurvorna $y = \sin(x + a)$ och $y = \sin(x + b)$ på ett intervall som ligger mellan två närstående skärningspunkter. **(3)**

Övning 5.10

a) Kurvan $f(x) = \sin(x)$ avgränsar tillsammans med dess tangenter i punkterna $x = 0$ och $x = \pi$ ett område i planet. Beräkna arean av detta område. **(4)**

b) Samma område roterar kring x-axeln. Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas. **(3)**

c) Beräkna integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

med hjälp av ett variabelbyte. **(2)**

Övning 5.11

a) Använd en integral för att beräkna arean av området mellan kurvan $y = x^2$ och linjen $y = 2x + 3$. **(3)**

b) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = x^2 \sin 2x$ genom att använda partiell integration. **(3)**

c) Bestäm volymen av den rotationskropp som bildas när kurvan $y = \tan x$ roterar kring x-axeln på intervallet $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$. **(3)**

Övning 5.12

a) Beräkna arean av området som begränsas av de två kurvorna $y = x$ och $y = x^3$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$. **(3)**

b) Använd trapetsmetoden för att bestämma ett närmevärde till integralen

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Använd fyra delintervall och ange svaret med två decimaler. **(3)**

c) Använd variabelbytet $t = x^2$ för att beräkna ett exakt värde för integralen

$$\int_0^2 xe^{-x^2/2}\,dx.$$

(3)

Övning 5.13

a) Beräkna arean av området mellan kurvorna $y = 2x^2 + x - 5$ och $y = x^2 + x - 1$ på intervallet $0 \leq x \leq 3$. **(3)**

b) Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/2} (\sin 2x - \cos 3x)\, dx.$$

(2)

c) Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas när kurvan

$$y = \sqrt{x} \cos x$$

roterar kring x-axeln på intervallet $0 \leq x \leq \pi$. (*Ledning:* Använd partiell integration och formeln för cosinus av dubbla vinkeln.) **(4)**

Övning 5.14

a) Beräkna arean mellan kurvorna $y = e^{2x}$ och $y = e^{-3x}$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$. **(3)**

b) Använd ett variabelbyte för att beräkna integralen

$$\int_0^1 \frac{2t}{1 + 4t^2}\, dt.$$

(3)

c) Bestäm konstanter a och b så att $e^{-2x}(a \cos x + b \sin x)$ blir en primitiv funktion till $e^{-2x} \cos x$ och använd detta för att beräkna integralen

$$\int_0^{\pi} e^{-2x} \cos x\, dx.$$

(3)

Övning 5.15

a) Beräkna arean av området mellan kurvorna $y = \sin x$ och $y = \sin^2 x$ på intervallet $0 \leq x \leq \pi$. (Ledning: $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$.) **(3)**

b) Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx.$$

med hjälp av partiell integration. **(3)**

c) Använd trapetsmetoden med tre delintervall för att bestämma ett närmevärde till integralen

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx$$

(3)

Övning 5.16

a) Beräkna arean mellan graferna för funktionerna $g(x) = \sin 2x$ och $h(x) = \cos x$ på intervallet $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. Ange svaret på exakt form. **(4)**

b) Använd trapetsmetoden med fyra lika långa delintervall för att beräkna ett närmevärde till integralen
$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2/2}\,dx.$$
Ange svaret med tre siffrors noggrannhet. **(2)**

c) Beräkna integralen
$$\int_{1}^{2} x^4 \ln x\,dx.$$
Ange svaret på exakt form. **(3)**

Övning 5.17

a) Beräkna det exakta värdet av integralen
$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin x + \cos 2x)\,dx.$$
(3)

b) För att beräkna tyngdpunkten hos en balk vars tvärsnittsyta begränsas av kurvorna $y(x) = \pm f(x)$, för $a \leq x \leq b$, behöver man beräkna kvoten
$$T_x = \frac{\int_a^b f(x)x\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}.$$
Beräkna T_x om $f(x) = \sin x$ för $0 \leq x \leq \pi/3$. **(3)**

c) Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas då kurvan $y = \sin x + 2\cos x$ roterar kring x-axeln på intervallet $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$. **(3)**

Övning 5.18

a) Beräkna arean av området som avgränsas av kurvorna $y = x^4$, $y = 2x^3$ och linjerna $x = -1$ och $x = 1$. Ange svaret på exakt form. **(3)**

b) Bestäm volymen av den rotationskropp som bildas då kurvan $y = xe^{-x}$ roterar kring x-axeln på intervallet $0 \leq x \leq 2$. Ange svaret på exakt form. **(3)**

c) Bestäm ett närmevärde till integralen
$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$$
med hjälp av trapetsmetoden med fyra lika långa delintervall. Ange svaret med två decimaler. (Observera att integranden inte är definierad i punkten $x = 0$, men har ett känt gränsvärde då x går mot noll.) **(3)**

Facit

Övning 5.1 (5B1134:Modelltentamen:4)

a) Arean mellan graferna är $\pi/3 + 2\sqrt{3}$.

b) Uttrycket för arean är $(2\pi - 4a)\cos a + 4\sin a$.

c) Maximum är 2π och minimum är 4.

Övning 5.2 (5B1134:KS:4:2003)

a) Arean av området mellan graferna är $1/2$.

b) Rotationskroppens volym är $\pi/30$.

c) Avståndet från områdets tyngdpunkt till x-axeln är $1/10$.

Övning 5.3 (5B1134:Tentamen:031013:4)

a) Volymen är $23\pi/24$.

b) $\int_0^\pi x^2 \sin x dx = \pi^2 - 4$.

c) $\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{2 - x^2} dx = 2\sqrt{2}/3$.

Övning 5.4 (5B1134:Tentamen:031103:4)

a) $\int_0^\pi |\sin x - \cos 2x| dx = 3\sqrt{3} - 2$.

b) $\int_1^2 (\ln x)^2 dx = 2(\ln 2)^2 - 4(\ln 2) + 2 \approx 0,19.$.

Övning 5.5 (5B1134:Tentamen:040109:4)

a) Arean mellan kurvorna ges av $(e^2 + 1)(e - 1)^2/2e^2 \approx 1,68$.

b) $\int_0^\pi x \sin x \, dx = \pi$.

c) Trapetsmetoden ger $\pi^2(\sqrt{2} + 1)/8 \approx 2,98$.

Övning 5.6 (5B1134:Tentamen:040821:4)

a) $\int_0^2 f(x)^2 dx = (e^4 - 4e^2 + 7)/2$.

b) $\int_0^1 (1 - x^2)e^x \, dx = 1$.

c) Konstanten är $K = e^{anT}$.

Övning 5.7 (5B1134:KS4:2004)

a) Integralernas värden blir $1/2$, respektive $\pi(24 - \pi^2)/96$ och felet man får genom att använda approximationen är $(24\pi - \pi^3 - 48)/96 \approx -0,038$.

b) Felet man får genom att använda trapetsmetoden blir $(\pi(2+\sqrt{3}) - 12)/24 \approx -0,011$.

c) Rotationskroppens volym är $V = \pi(2e - 1) \approx 13,9$ volymsenheter.

Övning 5.8 (5B1134:Tentamen:041011:4)

a) Arean av området är $9/8$ areaenheter.

b) $$\int_0^\pi \frac{\sin x}{2 + \cos x} \, dx = \ln(3)$$

c) Värdet på a som minimerar integralen är $a = 3/\pi^2$.

Övning 5.9 (5B1134:Tentamen:041030:4)

a) Arean av området är $32/3$ areaenheter.

b) Integralens värde är $\pi/4$.

c) Arean av området är $4|\sin((a - b)/2)| \quad (= 2\sqrt{2 - 2\cos(a - b)})$.

Övning 5.10 (5B1134:Tentamen:050112:4)

a) Arean är $(\pi^2 - 8)/4$.

b) Volymen är $\pi^2(\pi^2 - 6)/12$.

c) $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, dx = 2 - 2\ln 2$.

Övning 5.11 (5B1134:Tentamen:050829:4)

a) Arean mellan kurvorna är $32/3$ areaenheter.

b) $(1/4 - x^2/2)\cos 2x + (x/2)\sin 2x$ är en primitiv funktion till $x^2 \sin 2x$.

c) Rotationsvolymen är $2\pi - \pi^2/2 (\approx 1,35)$ volymnsenheter.

Övning 5.12 (5B1134:KS4:2005)

a) Arean av det området mellan kurvorna är $1/2$ (areaenheter).

b) Uppskattningen med trapetsmetoden ger $0,16$.

c) $\int_0^2 xe^{-x^2/2} \, dx = 1 - e^{-2}$.

Övning 5.13 (5B1134:Tentamen:051017:4)

a) Arean mellan kurvorna är $23/3$ areaenheter.

b) $\int_0^{\pi/2} (\sin 2x - \cos 3x) \, dx = 4/3$.

c) Volymen av rotationskroppen är $\pi^3/4$ volymsenheter.

Övning 5.14 (5B1134:Tentamen:051024:4)

a) Arean mellan kurvorna är $(e^3 + e^{-3})/3 + (e^2 + e^{-2})/2 - 5/3$ areaenheter.

b) $\int_0^1 2t/(1 + 4t^2) \, dt = (\ln 5)/4$.

c) $a = -2/5$ och $b = 1/5$ vilket leder till $\int_0^\pi e^{-2x} \cos x \, dx = 2(1 + e^{-2\pi})/5$.

Övning 5.15 (5B1134:Tentamen:060113:4)

a) Arean mellan graferna är $2 - \pi/2$ areaenheter.

b) $\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x \, dx = \pi - 2$.

c) En approximation med tre delintevall ger $1,2$.

Övning 5.16 (5B1134:KS4:2005)

a) Arean mellan graferna är $5/2$ areaenheter.

b) Trapetsmetoden med fyra delintervall ger $\int_{-1}^1 e^{-x^2/2} \, dx \approx 1,69$.

c) $\int_1^2 x^4 \ln(x) \, dx = (160 \ln 2 - 31)/25$.

Övning 5.17 (5B1134:Tentamen:061016:4)

a) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin x + \cos 2x) \, dx = 1$.

b) Vi får $T_x = (3\sqrt{3} - \pi)/3$.

c) Rotationskroppens volym är $5\pi^2/4 + 3\pi/2$ volymsenheter.

Övning 5.18 (5B1134:Tentamen:070116:4)

a) Arean av området mellan graferna är 1 areaenhet.

b) Volymen av rotationskroppen är $\pi(1 - 13e^{-4})/4$ volymsenheter.

c) Trapetsmetoden ger närmevärdet $2,70$.