SF1620 Matematik och modeller

2007-09-03

1 Första veckan — Geometri med trigonometri

Till att börja med kom trigometrin till för att hantera och lösa geometriska problem, framförallt inom astronomin. Det är i geometrin det är lättast att se de trigonometriska begreppen *sinus*, *cosinus* och *tangens*. Det handlar om att gå mellan vinklar och föhållanden mellan sidlängder i rätvinkliga trianglar. För att förstå vinkelbegreppet och de två olika enheter, *grader* och *radianer*, vi har för att mäta vinklar behöver vi också titta närmare på *cirklar*, *cirkelsektorer* och *cirkelsegment*. Från rätvinkliga trianglar går vi vidare till trianglar i allmänhet och vi kan då komma fram till tre viktiga samband, *Areasatsen*, *Cosinussatsen* och *Sinussatsen*.

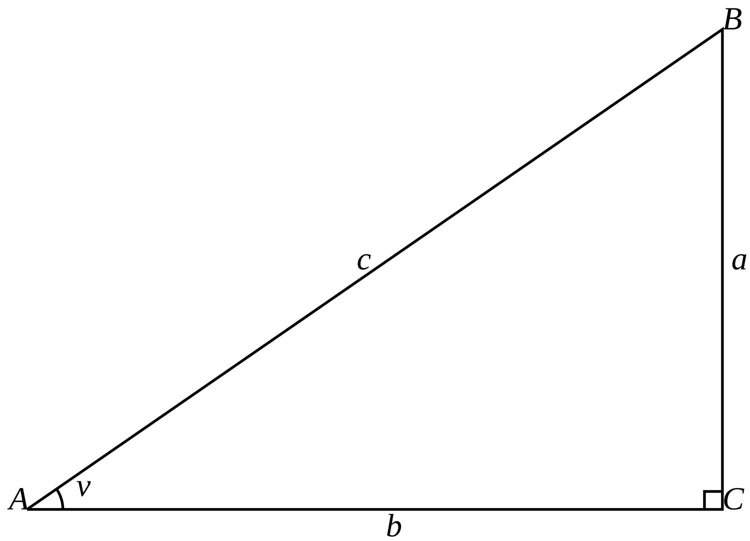
Rätvinkliga trianglar

I en triangel där en av vinklarna är *rät* har vi Pythagoras sats som talar om hur lång *hypotenusan*, c, är givet längderna av *kateterna*, a och b.

Sats 1 (Pythagoras sats) *Om vinkeln som står mot sidan c är rät gäller att*

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Övning 1 *Bevisa Pythagoras sats genom att dra höjden mot sidan c och se att denna delar in c i två delar vars längder är a^2/c och b^2/c på grund av likformighet.*



Om vinkeln vid A är v låter *sinus*, *cosinus* och *tangens* för vinkeln v vara relationerna

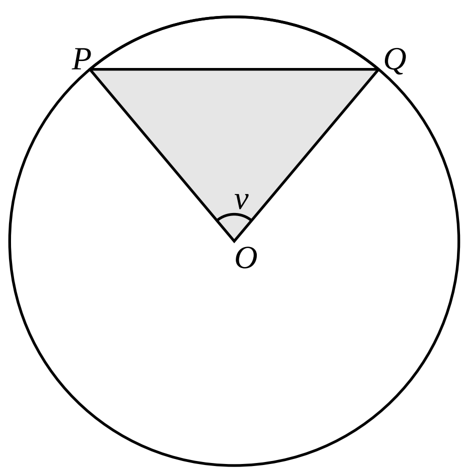
$$\sin v = \frac{a}{c}, \qquad \cos v = \frac{b}{c} \qquad \text{och} \qquad \tan v = \frac{a}{b}.$$

Dessa beror inte på hur stor triangeln är utan bara på vinkeln v och vi ser på en gång att

$$\tan v = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\sin v}{\cos v}.$$

Cirklar

Om vi drar två linjer från en cirkels centrum till dess periferi uppstår en *cirkelsektor* mellan dem. Drar vi dessutom en linje, eller *korda*, mellan de två punkterna, P och Q, på periferin skär vi av ett *cirkelsegment* utanför denna.



Om vi mäter vinkeln v i grader, så att ett helt varv motsvarar $360°$, kan vi beräkna cirkelsektorns area som

$$\frac{v}{360°} \cdot \pi r^2,$$

där r är cirkeln radie. Vi kan också mäta vinkeln i *radianer*, så att ett helt varv motsvarar 2π radianer. Då får vi cirkelsektorns area som

$$\frac{v}{2\pi} \cdot \pi r^2 = \frac{vr^2}{2}.$$

Cirkelsegmentets area kan vi sedan få genom att dra bort arean av triangeln, som vi enligt areasatsen nedan känner som

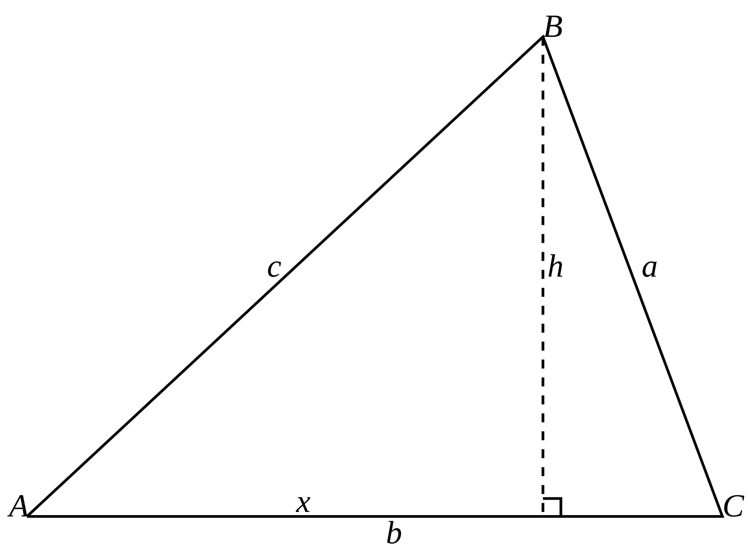
$$\frac{1}{2} \cdot r^2 \sin v.$$

Vi kan alltså skriva cirkelsegmentets area som

$$\frac{vr^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot r^2 \sin v = \frac{r^2}{2}(v - \sin v).$$

Triangelsatserna

Genom att rita en figur där vi drar en höjd mot en av sidorna kan vi härleda alla tre triangelsatserna. (Om vi ska vara ordentliga ska vi egentligen också se på de fall då höjden inte träffar motstående sida.) Om triangelns hörn är A, B och C, brukar vi kalla triangeln för ABC. Sidlängderna för motstående sidor brukar betecknas a, b och c och motsvarande vinklar för α, β och γ.



Sats 2 (Areasatsen) *Arean av triangeln ABC ges av*

$$\frac{1}{2} \cdot bc \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot ac \sin \beta = \frac{1}{2} \cdot ab \sin \gamma.$$

Övning 2 *Bevisa areasatsen genom att använda att arean är $bh/2$.*

Sats 3 (Sinussatsen) *I triangeln ABC gäller följande samband*

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}.$$

Övning 3 *Bevisa sinussatsen genom att ställa upp två olika uttryck för höjden h.*

Sats 4 (Cosinussatsen) *I triangeln ABC gäller följande samband*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad \textit{och} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Övning 4 *Bevisa cosinussatsen genom att skriva om b^2 som $(b-x)^2 - x^2 - 2xb$. Med hjälp av Pythagoras sats kan sedan $(b-x)^2$ och x^2 uttryckas med hjälp av a, c och h, medan x kan uttryckas med hjälp av cosinus.*

Rekommenderade uppgifter?

I den här kursen kommer det inte att finnas några uppgifter i kurslitteraturen som alla rekommenderas att göra. Det beror dels på att gruppen är så spridd när det gäller hur väl materialet är känt i förväg, dels på att det är tid att börja ett nytt sätt att arbeta med matematik. Meningen med uppgifterna är att man ska befästa de teoretiska kunskaperna i praktiken och kunna använda dem för att lösa problem. Problem kan ligga på mycket olika nivå när det gäller hur direkt man kan tillämpa de teoretiska kunskaperna. Det viktiga är att varje student arbetar med uppgifter som leder till nya kunskaper och insikter hos just den individen. Rekommendationen är alltså att titta på uppgifterna som hör till de givna avsnitten och först se på vilken nivå det är någon mening att börja. Den som redan tidigare är förtrogen med materialet har inte så stor nytta av att arbeta med uppgifter på den lägsta nivån. Uppgifterna i kurslitteraturen är markerade med A, B och C för att markera nivå där A är den lägsta nivån. Uppgifterna från kontrollskrivningar och tentamina befinner sig alla på högre nivå än A. Inför kontrollskrivningen är det meningen att alla ska ha hunnit upp till den nivå som krävs för godkänt och många kommer också att ha hunnit längre och får då poäng för högre betyg.

Uppgifterna som ges nedan ligger på en ytterligare högre nivå och är tänkta för att stimulera till att tänka vidare utanför lärobokens begränsningar. Det är inte meningen att man ska kunna lösa uppgifterna på egen hand. Det är i stället meningen att studenterna med hjälp av varandra och läraren skall kunna arbeta med problemen och på det viset lära sig något om geometri och trigonometri.

Övning 5 *Bestäm längden av kordan som ges av skärningen mellan enhetscirkeln och linjen $x + y = 1/2$.*

Övning 6 *Betrakta de punkter (x, y) som uppfyller olikheterna*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & \leq & 4, \\ y & \geq & 1. \end{cases}$$

a) *Rita upp området och avgör vad det är för typ av område.*

b) *Bestäm arean av området.*

c) *Ersätt den andra olikheten med $x + y \geq 2$ och bestäm arean av området.*

d) *Ersätt den andra olikheten med $y \geq c$ och bestäm hur arean av området, A, beror på c. Skissera grafen för $A(c)$.*

Övning 7 *Betrakta området i planet som beskrivs av olikheterna*

$$\begin{cases} x^2 + y^2 & \leq & 9, \\ x & \geq & 0, \\ y & \geq & x. \end{cases}$$

a) *Rita upp området och visa att det är en sektor.*

b) *Bestäm öppningsvinkeln, arean och båglängden för sektorn.*

c) *Hur varierar arean av sektorn med c om den sista olikheten ersätts med $y \geq cx$?*

Övning 8 *En triangel har två sidor av längd a och en sida av längd b. Uttryck sinus och cosinus för alla vinklar i triangeln med hjälp av a och b. Förenkla uttrycken så långt som möjligt. Vad händer om vi skriver $a = m^2 + n^2$ och $b = 4mn$?.*

Övning 9 *En tetraeder är en tredimensionell kropp med fyra triangelformade sidor. I en regelbunden tetraeder är alla fyra sidor liksidiga trianglar och tyngdpunkten i tetraedern har då samma avstånd till alla fyra hörn.*

- *Hur långt är det avståndet i förhållande till kanternas längd?*
- *Om man står i tyngdpunkten och ser mot två olika hörn. Vilken är då vinkeln mellan dessa?*
- *Hur långa skall tetraedernas sidor vara för att den skall rymma en liter?*

Övning 10 *Longitud och latitud ger koordinater på jordytan som kan tänkas som en sfär med omkretsen 40 000 km vid ekvatorn. Hur stort är avståndet mellan Stockholm och Göteborg? Koordinaterna är $(59,2°N, 17,6°O)$ för Stockholm och $(57,4°N, 12,2°O)$ för Göteborg.*

Övning 11 *En triangelformad plåtbit med måtten 15 cm, 20 cm och 30 cm hålls upp mot solen som lyser klar över Stockholm. Det är mitt på dagen på midsommarafton.*

a) *Hur stor kan arean av skuggan av plåtbiten på marken bli?*

b) *Hur stor kan den bli tre timmar senare?*

(Jordaxelns lutning är c:a $23°$.)

Övning 12 *Bestäm ett uttryck för arean av en triangel med hörn i punkterna (a_1, b_1), (a_2, b_2) och (a_3, b_3). (*Ledning: *Rita in triangeln i en rektangel med sidor parallella med koordinataxlarna.)*

Uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina.

Övning 1.1 Rita upp triangeln ABC med $A = (1, 3)$, $B = (2, 4)$ och $C = (5, 1)$.

a) Bestäm cosinus för samtliga vinklar i triangeln. **(4)**

b) Avgör vilken av vinklarna som är störst. **(2)**

c) Låt C röra sig efter linjen $x = 5$ och bestäm ett villkor på C för att vinkeln B skall vara den största i triangeln. **(3)**

Övning 1.2 Rita upp triangeln ABC med $A = (1, 2)$, $B = (3, 5)$ och $C = (5, 1)$.

a) Bestäm sinus för samtliga vinklar i triangeln genom att använda areasatsen.(*Ledning*: För att bestämma sidlängderna och arean av triangeln kan man skriva in den i en rektangel med sidorna parallella med koordinataxlarna.) **(4)**

b) En av vinklarna är nästan precis $60°$. Vilken är det, och är den större eller mindre än $60°$? **(2)**

c) Nästa vecka kommer vi att studera subtraktionssatsen för cosinus, som säger att

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Använd denna för att härleda ett uttryck för cosinus av vinkeln mellan de två linjerna $y = kx$ och $y = \ell x$, där $k \geq 0$ och $\ell \geq 0$. **(3)**

Övning 1.3

a) I en triangel ABC är sidan $c = |AB| = 5,1$ cm och sidan $a = |BC| = 6,7$ cm. Vinkeln vid A är $\alpha = 68°$. Bestäm närmevärden med två gällande siffror till den tredje sidans längd och de båda andra vinklarna med hjälp av någon av triangelsatserna. **(4)**

b) Två cirklar skär varandra i två punkter som ligger på avstånd $\sqrt{2}$ från varandra. Cirklarnas radier är 1 respektive $\sqrt{2}$. Bestäm arean av det område som ligger innanför båda cirklarna. **(5)**

Övning 1.4

a) En triangel har sidlängderna 4 cm, 5 cm och 6 cm. Bestäm samtliga vinklar och arean av triangeln. **(5)**

b) Vi får en rundad triangel från en liksidig triangel genom att sätta dit cirkelbågar med centrum i ett av hörnen och som går genom de andra två hörnen. Bestäm förhållandet mellan den rundade triangelns area och den ursprungliga triangelns area? **(4)**

Övning 1.5

a) Bestäm vinklarna i en triangel med sidlängderna 11 cm, 13 cm och 17 cm. **(4)**

b) Hur stor del av en cirkels yta utgörs av en regelbunden sexhörning som har sina hörn på cirkelns rand? **(3)**

c) Hur lång omkrets har en regelbunden n-hörning i förhållande till den cirkel dess hörn ligger på? **(2)**

Övning 1.6 I triangeln ABC har sidan AB längd 7, sidan BC längd 5 och $\cos B = 1/7$.

a) Bestäm exakta värden för längden av den tredje sidan och cosinus för de båda övriga vinklarna. **(5)**

b) Låt S vara centrum för en cirkel med som har alla triangelns hörn på periferin. Vi vet nu att vinkeln ASB är dubbelt så stor som vinkeln C enligt en känd sats. Enligt satsen för cosinus av dubbla vinkeln är $\cos 2C = 2\cos^2 C - 1$. Använd detta för att bestämma cirkelns radie. **(4)**

Övning 1.7 En triangulär tomt har måtten 35 m, 48 m och 50 m.

a) Beräkna närmevärden för vinklarna vid alla tre hörnen med två gällande siffror. **(4)**

b) Beräkna ett närmevärde med två gällande siffror för tomtens area. **(2)**

c) En familj som köpt den obebyggda tomten vill söka bygglov för ett hus som är format som en reguljär pentagon, dvs en femhörning där alla sidor är lika långa och alla vinklar är lika stora. Man kan räkna med att få bygglov för ett hus med bottenarea som upptar högst 10 $\%$ av tomtarean. Hur långa kan husets väggar i så fall vara? **(3)**

Övning 1.8 Två av sidlängderna i en triangel är 8 m och 13 m. En av vinklarna är $60°$.

a) Bestäm alla möjliga värden för den tredje sidans längd. **(4)**

b) Hur stor kan triangelns area maximalt vara? **(3)**

c) I en rätvinklig triangel delar en linje den räta vinkeln i två vinklar som är $30°$, respektive $60°$. Linjen delar hypotenusan i två längder som är 8 cm respektive 2 cm. Hur långa är kateterna i triangeln? **(2)**

Övning 1.9 I triangeln ABC är vinklarna $A = 42°$, $B = 63°$ och $C = 75°$.

a) Bestäm hur långa de övriga sidor är ifall den kortaste sidan har längd 15 m. Ange sidlängderna med två gällande siffors noggrannhet. **(3)**

b) Bestäm alla tre sidlängder med två gällande siffrors noggrannhet ifall arean av triangeln är 1000 m^2. **(4)**

c) Härled cosinussatsen med hjälp av Pythagoras sats genom att dra en höjd mot en av sidorna. **(2)**

Övning 1.10

a) I en triangel är två av sidlängderna 7 respektive 8 längdenheter och vinkeln mellan dessa sidor är $120°$. Bestäm den tredje sidans längd och triangelns area. **(3)**

b) Bestäm sidlängderna i en triangel där vinklarna är $34°$, $57°$ och $89°$ och triangelns area är 44 cm^2. Ange svaren med två värdesiffror. **(3)**

c) Två tangenter till en cirkel med radie r möts vid en vinkel av $45°$. Hur stor är arean av det område som ligger mellan tangenterna och cirkeln? **(3)**

Övning 1.11

a) Om två av sidorna i en triangel är 5 meter respektive 6 meter. Vilka längder på den tredje sidans längd ger upphov till en triangel med en area på minst 9 kvadratmeter. **(5)**

b) Jämför arean av en regelbunden oktagon med sida $1/\sqrt{2}$ med en regelbunden hexagon med sida 1. Vilken är störst? **(4)**

Övning 1.12

a) I en spetsvinklig[1] triangel är två av sidorna $8,6$ meter och $9,7$ meter. Arean är 32 kvadratmeter. Hur stora är vinklarna och hur lång är den tredje sidan? Ange svaren med två gällande siffrors noggrannhet. **(5)**

b) Två cirklar med samma radie r har sina medelpunkter på varandras periferi. Hur stor är arean av det område som cirklarna bildar tillsammans? Ange svaret med ett exakt värde. **(4)**

[1] alla vinklar är mindre än $90°$ ($\pi/2$ radianer)

Övning 1.13

a) Bestäm vinklarna i en triangel med sidlängderna $4,2$ cm, $6,3$ cm och $7,8$ cm. Ange svaren som närmevärden i grader med två gällande siffror. **(3)**

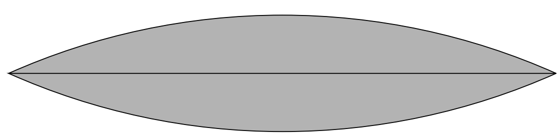
b) Bestäm arean av en triangel med sidlängderna $4,0$ cm, $5,2$ cm och $6,5$ cm. Ange svaret som närmevärde med två gällande siffror. **(2)**

c) Beräkna arean av ett cirkelsegmemt med sidan $8,4$ cm och höjden $2,3$ cm. Ange svaret som ett närmevärde med två gällande siffror. **(4)**

Övning 1.14

a) I en triangel är sidan a $2,3$ cm, sidan b $4,5$ cm och vinkeln mellan sidorna b och c är $24,8°$. Bestäm de övriga vinklarna, den tredje sidans längd och triangelns area. **(5)**

b) Bestäm arean av den bladformade figuren nedan där vinklarna vid spetsarna är $48°$ och längden är $5,2$ cm. **(4)**



Övning 1.15

a) Bestäm sidlängderna i en triangel med vinklarna $44°$, $63°$ och $73°$ om arean av triangeln är 64 cm^2. Ange svaren som närmevärden i grader med två gällande siffror. **(5)**

b) Härled areasatsen och sinussatsen. **(4)**

Övning 1.16 En triangel har hörnen A, B och C. Sidan AB är $5,2$ m, sidan BC är $6,3$ m och vinkeln vid A är $56°$.

a) Bestäm sidan AC och vinklarna vid B och C. Ange svaren som närmevärden i grader med två gällande siffror. **(4)**

b) Bestäm triangelns area med två gällande siffrors noggrannhet. **(2)**

c) Inuti triangeln ligger en cirkel med radie 75 cm som tangerar både sidan AB och sidan AC. Bestäm arean av det området som ligger mellan cirkeln och hörnet A med två gällande siffrors noggrannhet. **(3)**

Övning 1.17

a) Bestäm vinklarna i en triangel med sidlängderna 22 m, 53 m och 43 m. Ange svaren som närmevärden med en decimals noggrannhet. **(3)**

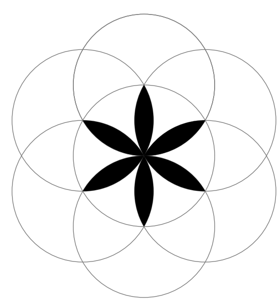
b) En fyrhörning har sidlängder $4,3$ cm, $5,3$ cm, $8,2$ cm och $5,6$ cm i denna ordning. Vinkeln mellan den förstnämnda och den sistnämnda sidan är $35°$. Bestäm fyrhörningens area. **(3)**

c) Bestäm arean av det minsta cirkelsegment som bildas då en rätvinklig triangel med sidlängder 5 cm, 12 cm, och 13 cm skrivs in i en cirkel, så att alla tre hörnen ligger på cirkelns periferi. **(3)**

Övning 1.18

a) Bestäm samtliga vinklar och arean av en triangel med sidorna $21,0$ cm, $23,0$ cm och $42,0$ cm. Ange vinklarna i grader med en decimal och arean med tre värdesiffrors noggrannhet. **(5)**

b) Bestäm arean av den skuggade delen av figuren nedan som skärs ut av sex lika stora cirklar med radie 1 cm och med centrum i spetsarna av den skuggade figuren. Ange svaret på exakt form. **(4)**



Facit
Geometri med trigonometri

Övning 1.1

a) $\cos\alpha = 1/\sqrt{10}$, $\cos\beta = 0$ och $\cos\gamma = 3/\sqrt{10}$.

b) Vinkeln vid B är störst.

c) Vinkeln vid B är störst om C ligger ovanför x-axeln.

Övning 1.2

a) $\sin\alpha = \frac{14}{\sqrt{13}\sqrt{17}}$, $\sin\beta = \frac{7}{\sqrt{13}\sqrt{5}}$ och $\sin\gamma = \frac{7}{\sqrt{5}\sqrt{17}}$.

b) Vinkeln β ligger nära 60°, men är lite större än 60°.

c) Cosinus för vinkeln mellan linjerna ges av $(1+k\ell)/(\sqrt{1+k^2}\sqrt{1+\ell^2})$.

Övning 1.3

a) Den tredje sidan är $6,7$ cm och vinklarna är $\beta \approx 67^\circ$ och $\gamma \approx 45^\circ$.

b) Arean av området som ligger i bägge cirklarna är $7\pi/12 - (\sqrt{3}+1)/2 \approx 0,467\text{cm}^2$.

Övning 1.4

a) Vinklarna är $\alpha = \arccos(3/4) \approx 41^\circ$, $\beta = \arccos(9/16) \approx 56^\circ$, $\gamma = \arccos(1/8) \approx 83^\circ$ och triangelns area är $15\sqrt{7}/4 \approx 9,9$ kvadratcentimeter.

b) Förhållandet mellan areorna är $2\pi/\sqrt{3} - 2 \approx 1,63$.

Övning 1.5

a) Vinklarna är $\alpha = \arccos(337/442) \approx 40,3^\circ$, $\beta = \arccos(241/374) \approx 49,9^\circ$ och $\gamma = \arccos(1/286) \approx 89,8^\circ$.

b) Andelen av arean är $3\sqrt{3}/2\pi \approx 0,83$.

c) Kvoten mellan omkretsarna är $(n/\pi)\sin\pi/n$.

Övning 1.6

a) Den tredje sidans längd är $b = 8$ och cosinus för de övriga vinklarna är $\cos A = 11/14$ och $\cos C = 1/2$.

b) Radien för cirkeln är $R = 7/\sqrt{3}$.

Övning 1.7

a) Vinklarna är $A \approx 42^\circ$, $B \approx 66^\circ$ och $C \approx 72^\circ$.

b) Tomtens area är 800 m^2.

c) Husets väggar kan vara högst $6,8$ m.

Alla svar är angivna med två gällande siffrors noggrannhet.

Övning 1.8

a) Den tredje sidan kan vara $c = 15$ m eller $c = \sqrt{129}$ m.

b) Arean av triangeln kan maximalt vara $30\sqrt{3}$ areaenheter.

c) Kateternas längder är $a = 40\sqrt{3}/7$ cm och $b = 10/7$ cm.

Övning 1.9

a) De övriga sidorna är 20 m respektive 22 m.

b) Sidlängderna är 39 m, 53 m och 57 m.

Övning 1.10

a) Den tredje sidans längd är 13 och arean är $14\sqrt{3}$.

b) Sidlängderna är $7,7$ cm, 11 cm och 14 cm.

c) Arean av området är $(1+\sqrt{2}-3\pi/8)r^2$.

Övning 1.11

a) Den tredje sidans längd kan variera mellan $\sqrt{13}$ och $\sqrt{109}$ för att arean skall vara minst 9 kvadratmeter.

b) Hexagonens area är $3\sqrt{3}/2 \approx 2,6$ areaenheter medan oktagonens bara är $1+\sqrt{2} \approx 2,4$ areaenheter.

Övning 1.12

a) Den tredje sidans längd är $7,8$ meter och vinklarna är 50°, 58° och 72°. ($0,87$, $1,0$ och $1,3$ radianer.)

b) Figurens area är $(8\pi + 3\sqrt{3})r^2/6$.

Övning 1.13

a) Vinklarna är $\alpha \approx 32^\circ$, $\beta \approx 54^\circ$ och $\gamma \approx 94^\circ$.

b) Arean är 10 kvadratcentimeter.

c) Aran av cirkelsegmentet är 14 cm^2.

Övning 1.14

a) Det finns två fall. I det första är de övriga vinklarna $\beta \approx 55,1^\circ$, $\gamma \approx 100^\circ$, den tredje sidans längd $c \approx 5,4$ cm och arean $5,1$ cm^2. I det andra fallet är $\beta \approx 124,8^\circ$, $\gamma \approx 30,3^\circ$, $c \approx 2,8$ cm och arean $2,6$ cm^2.

b) Arean är $3,9$ kvadratcentimeter.

Övning 1.15

a) Sidlängderna är 10 cm, 13 cm och 14 cm, med två gällande siffrors noggrannhet.

Övning 1.16

a) Det finns två fall. I det första är de övriga vinklarna $\beta \approx 50,3^\circ$, $\gamma \approx 106^\circ$, den tredje sidans längd $c \approx 11,0$ cm och arean $19,5$ cm^2. I det andra fallet är $\beta \approx 129,7^\circ$, $\gamma \approx 26,6^\circ$, $c \approx 5,12$ cm och arean $9,05$ cm^2.

b) Arean är $4,7$ kvadratcentimeter.

Övning 1.17

a) Sidan AC är $7,5$ m, vinkeln vid B är 81° och vinkeln vid C är 43°.

b) Triangelns area är 16 kvadratmeter.

c) Områdets area är $0,45$ kvadratmeter.

Övning 1.18

a) Vinklarna är $\alpha \approx 23,7^\circ$, $\beta \approx 104,6^\circ$ och $\gamma \approx 51,7^\circ$, med en decimals noggrannhet.

b) Fyrhörningens area är $11,5\ \text{cm}^2$.

c) Cirkelsegmentets area är $1,68\ \text{cm}^2$.

Övning 1.19

a) Vinklarna är $16,5^\circ$, $18,2^\circ$ och $137,5^\circ$. Arean är 138 cm^2.

b) Arean av den skuggade delen av figuren är $2\pi - 3\sqrt{3}$ cm^2.