SF1620 (5B1134) Matematik och modeller Uppgifter från kontrollskrivningar och tentamina under tiden 2003-2006

2007-08-31

1 Geometri med trigonometri

Övning 1.1 Rita upp triangeln ABC med $A = (1,3)$, $B = (2,4)$ och $C = (5,1)$.

a) Bestäm cosinus för samtliga vinklar i triangeln. **(4)**

b) Avgör vilken av vinklarna som är störst. **(2)**

c) Låt C röra sig efter linjen $x = 5$ och bestäm ett villkor på C för att vinkeln B skall vara den största i triangeln. **(3)**

Övning 1.2 Rita upp triangeln ABC med $A = (1,2)$, $B = (3,5)$ och $C = (5,1)$.

a) Bestäm sinus för samtliga vinklar i triangeln genom att använda areasatsen.(*Ledning*: För att bestämma sidlängderna och arean av triangeln kan man skriva in den i en rektangel med sidorna parallella med koordinataxlarna.) **(4)**

b) En av vinklarna är nästan precis $60°$. Vilken är det, och är den större eller mindre än $60°$? **(2)**

c) Nästa vecka kommer vi att studera subtraktionssatsen för cosinus, som säger att

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

Använd denna för att härleda ett uttryck för cosinus av vinkeln mellan de två linjerna $y = kx$ och $y = \ell x$, där $k \geq 0$ och $\ell \geq 0$. **(3)**

Övning 1.3

a) I en triangel ABC är sidan $c = |AB| = 5,1$ cm och sidan $a = |BC| = 6,7$ cm. Vinkeln vid A är $\alpha = 68°$. Bestäm närmevärden med två gällande siffror till den tredje sidans längd och de båda andra vinklarna med hjälp av någon av triangelsatserna. **(4)**

b) Två cirklar skär varandra i två punkter som ligger på avstånd $\sqrt{2}$ från varandra. Cirklarnas radier är 1 respektive $\sqrt{2}$. Bestäm arean av det område som ligger innanför båda cirklarna. **(5)**

Övning 1.4

a) En triangel har sidlängderna 4 cm, 5 cm och 6 cm. Bestäm samtliga vinklar och arean av triangeln. **(5)**

b) Vi får en rundad triangel från en liksidig triangel genom att sätta dit cirkelbågar med centrum i ett av hörnen och som går genom de andra två hörnen. Bestäm förhållandet mellan den rundade triangelns area och den ursprungliga triangelns area? **(4)**

Övning 1.5

a) Bestäm vinklarna i en triangel med sidlängderna 11 cm, 13 cm och 17 cm. **(4)**

b) Hur stor del av en cirkels yta utgörs av en regelbunden sexhörning som har sina hörn på cirkelns rand? **(3)**

c) Hur lång omkrets har en regelbunden n-hörning i förhållande till den cirkel dess hörn ligger på? **(2)**

Övning 1.6 I triangeln ABC har sidan AB längd 7, sidan BC längd 5 och $\cos B = 1/7$.

a) Bestäm exakta värden för längden av den tredje sidan och cosinus för de båda övriga vinklarna. **(5)**

b) Låt S vara centrum för en cirkel med som har alla triangelns hörn på periferin. Vi vet nu att vinkeln ASB är dubbelt så stor som vinkeln C enligt en känd sats. Enligt satsen för cosinus av dubbla vinkeln är $\cos 2C = 2\cos^2 C - 1$. Använd detta för att bestämma cirkelns radie. **(4)**

Övning 1.7 En triangulär tomt har måtten 35 m, 48 m och 50 m.

a) Beräkna närmevärden för vinklarna vid alla tre hörnen med två gällande siffror. **(4)**

b) Beräkna ett närmevärde med två gällande siffror för tomtens area. **(2)**

c) En familj som köpt den obebyggda tomten vill söka bygglov för ett hus som är format som en reguljär pentagon, dvs en femhörning där alla sidor är lika långa och alla vinklar är lika stora. Man kan räkna med att få bygglov för ett hus med bottenarea som upptar högst 10 $\%$ av tomtarean. Hur långa kan husets väggar i så fall vara? **(3)**

Övning 1.8 Två av sidlängderna i en triangel är 8 m och 13 m. En av vinklarna är $60°$.

a) Bestäm alla möjliga värden för den tredje sidans längd. **(4)**

b) Hur stor kan triangelns area maximalt vara? **(3)**

c) I en rätvinklig triangel delar en linje den räta vinkeln i två vinklar som är $30°$, respektive $60°$. Linjen delar hypotenusan i två längder som är 8 cm respektive 2 cm. Hur långa är kateterna i triangeln? **(2)**

Övning 1.9 I triangeln ABC är vinklarna $A = 42°$, $B = 63°$ och $C = 75°$.

a) Bestäm hur långa de övriga sidor är ifall den kortaste sidan har längd 15 m. Ange sidlängderna med två gällande siffors noggrannhet. **(3)**

b) Bestäm alla tre sidlängder med två gällande siffrors noggrannhet ifall arean av triangeln är 1000 m^2. **(4)**

c) Härled cosinussatsen med hjälp av Pythagoras sats genom att dra en höjd mot en av sidorna. **(2)**

Övning 1.10

a) I en triangel är två av sidlängderna 7 respektive 8 längdenheter och vinkeln mellan dessa sidor är $120°$. Bestäm den tredje sidans längd och triangelns area.

(3)

b) Bestäm sidlängderna i en triangel där vinklarna är $34°$, $57°$ och $89°$ och triangelns area är 44 cm^2. Ange svaren med två värdesiffror. **(3)**

c) Två tangenter till en cirkel med radie r möts vid en vinkel av $45°$. Hur stor är arean av det område som ligger mellan tangenterna och cirkeln? **(3)**

Övning 1.11

a) Om två av sidorna i en triangel är 5 meter respektive 6 meter. Vilka längder på den tredje sidans längd ger upphov till en triangel med en area på minst 9 kvadratmeter. **(5)**

b) Jämför arean av en regelbunden oktagon med sida $1/\sqrt{2}$ med en regelbunden hexagon med sida 1. Vilken är störst? **(4)**

Övning 1.12

a) I en spetsvinklig[1] triangel är två av sidorna $8,6$ meter och $9,7$ meter. Arean är 32 kvadratmeter. Hur stora är vinklarna och hur lång är den tredje sidan? Ange svaren med två gällande siffrors noggrannhet. **(5)**

[1]alla vinklar är mindre än $90°$ ($\pi/2$ radianer)

b) Två cirklar med samma radie r har sina medelpunkter på varandras periferi. Hur stor är arean av det område som cirklarna bildar tillsammans? Ange svaret med ett exakt värde. **(4)**

Övning 1.13

a) Bestäm vinklarna i en triangel med sidlängderna $4,2$ cm, $6,3$ cm och $7,8$ cm. Ange svaren som närmevärden i grader med två gällande siffror. **(3)**

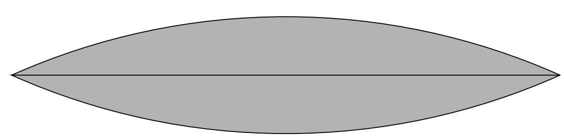
b) Bestäm arean av en triangel med sidlängderna $4,0$ cm, $5,2$ cm och $6,5$ cm. Ange svaret som närmevärde med två gällande siffror. **(2)**

c) Beräkna arean av ett cirkelsegmemt med sidan $8,4$ cm och höjden $2,3$ cm. Ange svaret som ett närmevärde med två gällande siffror. **(4)**

Övning 1.14

a) I en triangel är sidan a $2,3$ cm, sidan b $4,5$ cm och vinkeln mellan sidorna b och c är $24,8°$. Bestäm de övriga vinklarna, den tredje sidans längd och triangelns area. **(5)**

b) Bestäm arean av den bladformade figuren nedan där vinklarna vid spetsarna är $48°$ och längden är $5,2$ cm. **(4)**



Övning 1.15

a) Bestäm sidlängderna i en triangel med vinklarna $44°$, $63°$ och $73°$ om arean av triangeln är 64 cm^2. Ange svaren som närmevärden i grader med två gällande siffror. **(5)**

b) Härled areasatsen och sinussatsen. **(4)**

Övning 1.16 En triangel har hörnen A, B och C. Sidan AB är $5,2$ m, sidan BC är $6,3$ m och vinkeln vid A är $56°$.

a) Bestäm sidan AC och vinklarna vid B och C. Ange svaren som närmevärden i grader med två gällande siffror. **(4)**

b) Bestäm triangelns area med två gällande siffrors noggrannhet. **(2)**

c) Inuti triangeln ligger en cirkel med radie 75 cm som tangerar både sidan AB och sidan AC. Bestäm arean av det området som ligger mellan cirkeln och hörnet A med två gällande siffrors noggrannhet. **(3)**

Övning 1.17

a) Bestäm vinklarna i en triangel med sidlängderna 22 m, 53 m och 43 m. Ange svaren som närmevärden med en decimals noggrannhet. **(3)**

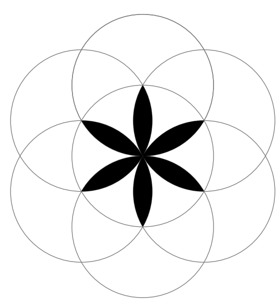
b) En fyrhörning har sidlängder $4,3$ cm, $5,3$ cm, $8,2$ cm och $5,6$ cm i denna ordning. Vinkeln mellan den förstnämnda och den sistnämnda sidan är $35°$. Bestäm fyrhörningens area. **(3)**

c) Bestäm arean av det minsta cirkelsegment som bildas då en rätvinklig triangel med sidlängder 5 cm, 12 cm, och 13 cm skrivs in i en cirkel, så att alla tre hörnen ligger på cirkelns periferi. **(3)**

Övning 1.18

a) Bestäm samtliga vinklar och arean av en triangel med sidorna $21,0$ cm, $23,0$ cm och $42,0$ cm. Ange vinklarna i grader med en decimal och arean med tre värdesiffrors noggrannhet. **(5)**

b) Bestäm arean av den skuggade delen av figuren nedan som skärs ut av sex lika stora cirklar med radie 1 cm och med centrum i spetsarna av den skuggade figuren. Ange svaret på exakt form. **(4)**



2 Trigonometriska funktioner, ekvationer och formler

Övning 2.1

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\tan(3\pi x + \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

(4)

b) I en triangel är cosinus för två av vinklarna $1/4$, respektive $1/2$. Använd additionsformeln för cosinus för att bestämma cosinus av den tredje vinkeln. **(3)**

c) Om $\cos\alpha = 1/4$ och $\cos\beta = x$, vad är det då för villkor på x för att triangeln har två vinklar som är lika? **(2)**

Övning 2.2

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2},$$

där $\omega = 100\pi$. **(4)**

b) Skriv om $5\sin\omega t - 12\cos\omega t$ på formen $A\sin(\omega t + \phi)$. **(3)**

c) Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen

$$f(x) = a\sin x + b\cos x + c$$

där a, b och c är reella konstanter. **(2)**

Övning 2.3

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin 4x = \cos 5x.$$

(3)

b) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\cos x - \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

(4)

c) Använd formeln för cosinus av dubbla vinkeln för att finna ett exakt uttryck för $\sin \pi/12$. **(2)**

Övning 2.4

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\tan 2x = \sqrt{3}.$$

(3)

b) För att bestämma extremvärdena för funktionen $f(x) = \sin 2x \cos x$ leds man till att finna nollställena till derivatan $g(x) = f'(x) = 2\cos 2x \cos x - \sin 2x \sin x$. Förenkla uttrycket för $g(x)$ och bestäm alla lösningar till den trigonometriska ekvationen $g(x) = 0$. **(4)**

c) Härled formeln

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}(1+\sqrt{3})}{4}$$

med hjälp av någon av additionsformlerna. **(2)**

Övning 2.5

a) Skriv om $\sin x - \sqrt{3}\cos x$ på formen $A\sin(x+\phi)$. **(3)**

b) Använd resultatet från a) för att bestämma samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}.$$

(4)

c) Härled, med hjälp av additionsformlerna och trigonometriska ettan, formeln för $\sin(x/2)$ uttryckt i $\cos x$. **(2)**

Övning 2.6

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen **(4)**

$$\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

b) Använd additionsformlerna och trigonometriska ettan för att skriva om $\sin 3x$ som ett polynom i $\sin x$ och $\cos 3x$ som polynom i $\cos x$. **(5)**

Övning 2.7

a) Rita upp grafen för funktionen $f(x) = 3,5\cos(4,4\,x)$ i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi/3$ och bestäm alla lösningar till ekvationen

$$3,5\cos(4,4\,x) = 1,2$$

i samma intervall. Ange lösningarna med två värdesiffror. **(4)**

b) Hur många lösningar har ekvationen

$$\sin(\omega t + \phi) = 0,242$$

i intervallet 0 ms $\leq t \leq 94$ ms, om $\omega = 3,14 \cdot 10^2$ radianer/s och $\phi = -2\pi/3$? **(2)**

b) Man kan skriva om $a\sin(\omega t) + b\sin(\omega t + 2\pi/3)$ på formen $A\sin(\omega t + \phi)$. Bestäm amplituden A uttryckt i a och b. **(3)**

Övning 2.8

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin\left(\frac{2x - \pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

(3)

b) Bestäm den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$1,2\sin x + 1,4\cos x = 0,54$$

med två gällande siffrors noggrannhet. **(4)**

c) Använd sinussatsen för att härleda additionssatsen för sinus i det fall då alla inblandade vinklar ligger mellan $0°$ och $180°$. **(2)**

Övning 2.9

a) Bestäm samtliga nollställen till funktionen

$$f(x) = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) + 1.$$

(3)

b) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin x + \sin 2x = 0.$$

(3)

c) Vilket är det minsta positiva tal, x, där det inte spelar någon roll om man har miniräknaren inställd på radianer eller grader när man skall beräkna $\sin x$? **(3)**

Övning 2.10

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin\left(5x - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(3)

b) Bestäm ett närmevärde med två gällande siffror till den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$\sin x + 2\cos x = \sqrt{2}$$

(4)

c) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0.$$

(2)

Övning 2.11

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\tan(2t + \pi/5) = -\sqrt{3}$$

(4)

b) Bestäm med två värdesiffrors noggrannhet konstanterna A och ϕ sådana att

$$A\sin(x + \phi) = 5\sin x - 3\cos x.$$

(3)

c) Skriv $\cos 4x$ som ett polynom i $\cos x$. **(2)**

Övning 2.12

a) Bestäm samtliga lösningar i intervallet $5\pi \leq t \leq 7\pi$ till ekvationen

$$\sin(t) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ange svaret exakt i radianer. **(3)**

b) Bestäm den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$5 \sin x + 8 \cos x = 0$$

med en noggrannhet på tre gällande siffor. **(3)**

2) Uttrycket $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x$ kan skrivas om på formen $A \sin(2x + \phi) + B$. Bestäm konstanterna A och B uttryckta i a, b och c. **(3)**

Övning 2.13

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\tan(3x + \pi/4) = \sqrt{3}.$$

(3)

c) Bestäm den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$2,0 \sin x - 3,2 \cos x = 2,4.$$

Ange svaret som ett närmevärde med två decimalers noggrannhet. **(4)**

c) Bestäm konstanterna a och b så att kurvan $y = a \cos x + b \sin x$ går genom punkterna $(x, y) = (0, 2)$ och $(x, y) = (\pi/3, -1)$. **(2)**

Övning 2.14

a) Bestäm alla lösningar till ekvationen

$$\sin(5x + 3\pi/5) = 0,96$$

som ligger i intervallet $0 \leq x \leq \pi$. Ange svaren som närmevärden med två decimalers noggrannhet. **(4)**

b) Bestäm exakta uttryck för samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin x - \cos x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

(3)

c) Härled formeln för tangens av dubbla vinkeln, det vill säga uttryck $\tan 2x$ i $\tan x$. **(2)**

Övning 2.15

a) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\cos(2x + \pi/3) = 0,62$$

i intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$. Ange svaren med tre gällande siffrors noggrannhet. **(3)**

b) Skriv om uttrycket $4\sin x + 3\cos x$ på formen $A\cos(x+\phi)$. **(3)**

c) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin^2 x + \sin 2x = 1.$$

(3)

Övning 2.16

a) Bestäm samtliga lösningar i intervallet $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$ till ekvationen

$$2\tan(3x+2) = 1.$$

Ange svaren i radianer med två gällande siffrors noggrannhet. **(3)**

b) Skriv $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x$ på formen $A\sin(2x+\phi)$. Ange svaret exakt. **(3)**

c) Bestäm exakta värden på samtliga lösningar till ekvationen

$$2\sin^2 x + \sin 2x = 2.$$

(3)

Övning 2.17

a) Bestäm de två minsta positiva lösningarna till ekvationen

$$13\sin\left(\frac{3\pi t - 2\pi}{10}\right) = 8.$$

Ange svaren med tre gällande siffrors noggrannhet. **(3)**

b) Bestäm samtliga lösningar till ekvationen

$$\sin^2 t + 2\sin t\cos t + 3\cos^2 t = 1$$

Ange svaren på exakt form. **(3)**

c) Bestäm konstanterna a, b och ω så att ekvationen

$$a\cos\omega t + b\sin\omega t = 2$$

har lösningarna $t = -2 + 24n$ och $t = 4 + 24n$, där n är ett godtyckligt heltal. Ange svaren på exakt form. **(3)**

Övning 2.18

a) Bestäm den minsta positiva lösningen till ekvationen

$$\cos(3x + \pi/7) = 1/4.$$

Ange svaret i radianer med två värdesiffrors noggrannhet. **(3)**

b) Bestäm konstanterna A och ϕ så att $2\cos 2x + \sin 2x = A\cos(2x+\phi)$. Ange svaren som närmevärden med två värdesiffrors noggrannhet. **(3)**

c) Bestäm det exakta antalet lösningar till ekvationen $\tan 5x = \sin 10x$ i intervallet $0 \leq x \leq 100$. **(3)**

3 Derivator med tillämpningar

Övning 3.1 Låt $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ vara den funktion som ges av $f(x) = (2\cos x + 1)^4$, för alla reella tal x.

a) Formulera kedjeregeln och använd den för att derivera f. **(3)**

b) Bestäm maximum och minimum för funktionen f på intervallet $\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2$. **(4)**

c) Beskriv hur vi i allmänhet finner extrempunkterna till $h = g^n$ då $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ är en given funktion och n är ett positivt heltal. **(2)**

Övning 3.2 Betrakta funktionen

$$f(x) = \frac{\sin x - \cos x}{e^x}.$$

a) Formulera regeln för derivering av en kvot och använd den för att beräkna derivatan av $f(x)$. Förenkla uttrycket så långt som möjligt. **(3)**

b) Skissera grafen för $f(x)$ på intervallet $0 \leq x \leq \pi$ och bestäm maximum och minimum av $f(x)$ på samma intervall. **(4)**

c) Funktionen $y = f(x)$ är lösningen till en *differentialekvation*

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Bestäm konstanterna a och b. **(2)**

Övning 3.3 Betrakta funktionen $f(x) = \sin x + 2\cos^2 x$.

a) Formulera kedjeregeln och använd den för att beräkna derivatan av funktionen $f(x)$. **(3)**

b) Bestäm närmevärden till maximum och minimum för $f(x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$ med två gällande siffror. **(4)**

c) Bestäm exakta värden för maximum och minimum för funktionen $f(x)$. **(2)**

Övning 3.4 Betrakta funktionen $f(x) = x(3 - x)e^{-x/2}$.

a) Beräkna derivatan av funktionen $f(x)$. Ange noggrant vilka deriveringsregler som används. **(4)**

b) Bestäm maximum och minimum för $f(x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 10$ och skissera grafen för $f(x)$ på samma intervall. **(5)**

Övning 3.5 Betrakta funktionen $f(x) = (x^2 - x)e^{2x}$.

a) Beräkna derivatan av funktionen $f(x)$. Ange noggrant vilka deriveringsregler som används. **(4)**

b) Bestäm maximum och minimum för $f(x)$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$ och skissera grafen för $f(x)$ på samma intervall. **(5)**

Övning 3.6

a) Derivera funktionen $f(x) = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x$. (Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används.) **(2)**

b) Derivera funktionen $g(x) = \cos 2x \sin 3x$. **(2)**

c) Bestäm ett värde på konstanten a så att funktionen $h(x) = e^{ax}\sin^2 x$ får ett lokalt maximum i punkten $x = \pi/3$. **(5)**

Övning 3.7

a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

Ange noggrant vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Bestäm det största och det minsta värdet för funktionen $g(x) = 2x^3 - 3x + 2$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ och skissera grafen för $g(x)$ på samma intervall. Ange svaren exakt. **(4)**

c) Använd Newton-Raphsons metod med startvärde $x = 0$ för att finna ett närmevärde till den enda reella lösningen till ekvationen

$$x^3 + 3x + 1 = 0.$$

Utför två iterationer och gör en uppskattning av felet. **(2)**

Övning 3.8

a) Derivera funktionen

$$f(x) = \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}}.$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Bestäm det största och det minsta värdet för funktionen

$$g(x) = \frac{\sin x}{2 + \cos x}$$

på intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall. **(4)**

c) Härled derivatan av $\tan x$ direkt från definitionen av derivata. (Ledning: Använd att $(\sin x)/x$ går mot 1 när x går mot noll.) **(2)**

Övning 3.9

a) Derivera funktionen

$$f(x) = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin(x) + \cos(x)}.$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Bestäm det största och det minsta värdet för funktionen

$$g(x) = \frac{2 + x}{5 + x^2}$$

på intervallet $-5 \leq x \leq 5$. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall. **(4)**

c) Visa direkt från definitionen av derivata att en exponentialfunktion, $h(x)$, uppfyller

$$h'(x) = h(x)\frac{h'(0)}{h(0)}.$$

(2)

Övning 3.10

a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \sqrt{1 - e^{-2x}\cos(x)}$$

som är definierad för $x \geq 0$. Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Använd Newton-Raphsons metod för att bestämma ett närmevärde till nollstället till funktionen $f(x) = \sin(x) + x - 1$. Utför två iterationer med startvärde $x = 0$. och ange nollstället med korrekt antal gällande siffror. **(4)**

c) Härled formeln för derivatan av en produkt av två deriverbara funktioner. **(2)**

Övning 3.11

a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \ln x \sin^2 x.$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Beräkna maximum och minimum för funktionen

$$g(x) = \frac{2x^2 + 8}{2x + 3}$$

på intervallet $0 \leq x \leq 3$ och skissera grafen för funktionen på samma intervall. **(4)**

c) Om man behöver beräkna $\sqrt{57}$ med en miniräknare som saknar kvadratrotsfunktion kan man använda Newton-Raphsons metod. Använd den för att beräkna ett närmevärde med tre gällande siffrors noggrannhet utgående från startvärdet $x_0 = 7$. **(2)**

Övning 3.12

a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = xe^{-x^2/2}$$

och ange tydligt vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Beräkna maximum och minimum för funktionen

$$f(x) = xe^{-x^2/2}$$

på intervallet $-2 \leq x \leq 2$. Ange svaren exakt. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall. **(4)**

c) Använd Newton-Raphsons metod för att beräkna ett närmevärde till den lösning till ekvationen

$$4 \sin x = x$$

som ligger i intervallet $0 \leq x \leq \pi$. Gör två iterationer från startvärdet $x_0 = \pi$. **(2)**

Övning 3.13

a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = e^{-\sqrt{x}} \cos(x)$$

som är definierad för $x \geq 0$. Var noggrann med att enge vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Bestäm maximum och minimum för funktionen

$$g(x) = 2x\sqrt{x} - 3x^2\sqrt{x}$$

på intervallet $0 \leq x \leq 1$. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall. **(4)**

c) För att bestämma maximum för funktionen $h(x) = e^{-at}\sin(\omega t)$ för $t > 0$ vill man hitta det första nollstället för derivatan, $h'(x)$. En första gissning är $t = \pi/2\omega$, eftersom sinusfunktionen har sitt maxmimum i den punkten. Använd Newton-Raphsons metod för att förbättra denna gissning. **(2)**

Övning 3.14

a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = \frac{2\cos x}{1 + 2\cos^2 x}$$

ange noggrant vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Bestäm maximum och minimum för funktionen

$$g(t) = \frac{2t}{1 + 2t^2}$$

på intervallet $-1 \le t \le 1$ och skissera grafen för funktionen på samma intervall. **(4)**

c) Visa med hjälp av derivatans definition att $\cos x$ är deriverbar i $x = 0$ och att derivatan är lika med 0 i samma punkt. **(2)**

Övning 3.15

a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = (1 + \sin^2 x)(2 + \cos^2 x)$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. Förenkla uttrycket så långt det går **(4)**

b) Bestäm maximum och minimum för funktionen

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}$$

på intervallet $0 \le x \le 2$. Skissera också grafen för funktionen på samma intervall. **(5)**

Övning 3.16

a) Bestäm derivatan av funktionen

$$f(x) = e^{-\sqrt{x}}\tan x, \qquad 0 < x < \pi/2.$$

Ange noggrant vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Bestäm maximum och minimum för funktionen

$$g(x) = x^3 - 3x + 1$$

på intervallet $0 \leq x \leq 2$. Ange svaren på exakt form. **(3)**

c) Använd Newton-Raphsons metod för att finna ett närmevärde till den lösning till ekvationen

$$x^3 + 1 = 3x$$

som ligger i intervallet $0 \leq x \leq 1$. Börja med $x_0 = 0$ och utför två iterationer. Uppskatta noggrannheten i svaret. **(3)**

Övning 3.17

a) Bestäm derviatan av funktionen

$$f(t) = \sin^3 t + 3\frac{\cos t}{\cos 3t}.$$

Ange noggrant vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Bestäm det största och minsta värde funktionen

$$g(x) = 3\sin^3 t + 4\cos^3 t$$

antar på intervallet $0 \leq t \leq \pi/3$. Ange svaret med tre gällande siffrors noggrannhet och skissera grafen för funktionen på samma intervall. **(4)**

c) Det finns en växande deriverbar funktion $f(x)$ som är definierad på intervallet $-1 \leq x \leq 1$ och som uppfyller

$$\sin(f(x)) = x$$

för alla $-1 \leq x \leq 1$. Använd kedjeregeln för att beräkna derivatan för $f(x)$. **(2)**

Övning 3.18

a) Beräkna derivatan av funktionen

$$f(x) = e^{\sin x} \cos x.$$

Var noggrann med att ange vilka deriveringsregler som används och hur de används. **(3)**

b) Bestäm det största och det minsta värdet av funktionen

$$g(t) = 4\sin^3 t + 3\cos t$$

på intervallet $0 \leq t \leq \pi$ och skissera grafen för funktionen på samma intervall. **(4)**

c) Använd Newton-Raphsons metod för att bestämma ett närmevärde för den lösning till ekvationen $x^4 + 2x = 1$ som ligger i intervallet $0 \leq x \leq 1$. Börja med $x = 0$ och utför två iterationer. Uppskatta också felet i svaret. **(2)**

4 Integraler med tillämpningar

Övning 4.1

a) Bestäm arean av det område som ligger mellan graferna för funktionerna $f(x) = \cos x$ och $g(x) = 1/2$ på intervallet $[0, 2\pi]$. **(4)**

b) Bestäm ett uttryck för motsvarande area om vi byter ut funktionen $g(x) = 1/2$ mot $g(x) = \cos a$, där a är en konstant med $0 \leq a \leq \pi$. **(3)**

c) Vilka värden på a ger den största, respektive minsta arean mellan graferna? **(2)**

Övning 4.2

a) Bestäm arean av området mellan graferna för funktionerna $f(x) = \cos x$ och $g(x) = \sin 2x$ på intervallet $0 \leq x \leq \pi/2$. **(4)**

b) Kurvan $y = x(1 - x)$ på intervallet $0 \leq x \leq 1$ roterar kring x-axeln och begränsar på så vis en tredimensionell kropp. Bestäm med hjälp av en integral volymen av denna rotationskropp. **(3)**

c) När ett område ovanför x-axeln roteras kring x-axeln kan volymen för den uppkomna rotationskroppen beskrivas som $2\pi r A$ där A är arean under grafen som roteras och r är avståndet från områdets tyngdpunkt till x-axeln. Bestäm tyngdpunktens höjd över x-axeln för det område som roteras i b). **(2)**

Övning 4.3

a) Bestäm volymen av den rotationskropp som uppkommer då kurvan $y = \sqrt{1 - 2x^2}$ roterar kring x-axeln på intervallet $0 \leq x \leq 1/2$. **(3)**

b) Använd partiell integration för att beräkna integralen

$$\int_0^{\pi} x^2 \sin x dx.$$

(4)

c) Beräkna integralen

$$\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{2 - x^2} dx$$

med hjälp av variabelbytet $t = 2 - x^2$. (Ledning: $2/3x\sqrt{x}$ är en primitiv funktion till $\sqrt{x}$.) **(2)**

Övning 4.4

a) Beräkna integralen

$$\int_0^\pi |\sin x - \cos 2x|\, dx.$$

(4)

b) Använd först variabelbytet $t = \ln x$ och sedan partiell integration för att beräkna integralen

$$\int_1^2 (\ln x)^2 dx.$$

(5)

Övning 4.5

a) Bestäm arean mellan graferna för funktionerna $f(x) = e^x$ och $g(x) = e^{2x}$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$. **(4)**

b) Beräkna integralen

$$\int_0^\pi x \sin x\, dx$$

med hjälp av partiell integration. **(3)**

c) Använd en trapetsmetoden med fyra delintervall för att få en numerisk approximation av samma integral som i föregående deluppgift. **(2)**

Övning 4.6

a) Beräkna integralen

$$\int_0^2 f(x)^2 dx$$

där $f(x) = e^x - 1$ för alla reella x. **(3)**

b) Beräkna integralen

$$\int_0^1 (1 - x^2)e^x\, dx$$

med hjälp av partiell integration. **(3)**

c) Låt $g(t)$ vara en periodisk funktion med period T och låt a vara en reell konstant. Visa att

$$\int_{nT}^{(n+1)T} e^{at} f(t) dt = K \int_0^T e^{at} f(t) dt$$

för någon konstant K och bestäm denna konstant. **(3)**

Övning 4.7

a) Polynomet $p(x) = 1 - 2x^2$ är en approximation av $\cos 2x$ som är bra för små värden på x. Beräkna integralerna

$$\int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx \qquad \text{och} \qquad \int_0^{\pi/4} p(x) \, dx$$

och jämför resultaten. Hur stort blir det fel man får genom att använda approximationen? **(4)**

b) Bestäm hur stort felet blir när man använder trapetsmetoden med tre delintervall för att beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx.$$

(2)

c) Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas då området under grafen för $f(x) = \ln(x) + 1$ roterar kring x-axeln på intervallet $1 \leq x \leq e$. **(3)**

Övning 4.8

a) Kurvorna $y = e^{2x}$ och $y = e^{-2x}$ avgränsar tillsammans med linjen $x = \ln(2)$ ett område i planet. Beräkna arean av detta område. **(3)**

b) Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2 + \cos x} \, dx.$$

med hjälp av variabelbyte. **(3)**

c) Bestäm det värde på konstanten a som minimerar

$$\int_0^{\pi} (ax - \sin x)^2 \, dx.$$

(3)

Övning 4.9

a) Beräkna arean av det ändliga område som begränsas av parabeln $y = 4 - x^2$ och linjen $y = 1 + 2x$. **(3)**

b) Använd variabelbytet $x = \tan t$ för att beräkna integralen

$$\int_0^{1} \frac{1}{1 + x^2} \, dx.$$

(3)

c) Beräkna arean mellan de två kurvorna $y = \sin(x + a)$ och $y = \sin(x + b)$ på ett intervall som ligger mellan två närstående skärningspunkter. **(3)**

Övning 4.10

a) Kurvan $f(x) = \sin(x)$ avgränsar tillsammans med dess tangenter i punkterna $x = 0$ och $x = \pi$ ett område i planet. Beräkna arean av detta område. **(4)**

b) Samma område roterar kring x-axeln. Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas. **(3)**

c) Beräkna integralen

$$\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$$

med hjälp av ett variabelbyte. **(2)**

Övning 4.11

a) Använd en integral för att beräkna arean av området mellan kurvan $y = x^2$ och linjen $y = 2x + 3$. **(3)**

b) Bestäm en primitiv funktion till $f(x) = x^2 \sin 2x$ genom att använda partiell integration. **(3)**

c) Bestäm volymen av den rotationskropp som bildas när kurvan $y = \tan x$ roterar kring x-axeln på intervallet $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$. **(3)**

Övning 4.12

a) Beräkna arean av området som begränsas av de två kurvorna $y = x$ och $y = x^3$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$. **(3)**

b) Använd trapetsmetoden för att bestämma ett närmevärde till integralen

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Använd fyra delintervall och ange svaret med två decimaler. **(3)**

c) Använd variabelbytet $t = x^2$ för att beräkna ett exakt värde för integralen

$$\int_0^2 xe^{-x^2/2}\,dx.$$

(3)

Övning 4.13

a) Beräkna arean av området mellan kurvorna $y = 2x^2 + x - 5$ och $y = x^2 + x - 1$ på intervallet $0 \leq x \leq 3$. **(3)**

b) Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/2} (\sin 2x - \cos 3x)\, dx.$$

(2)

c) Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas när kurvan

$$y = \sqrt{x} \cos x$$

roterar kring x-axeln på intervallet $0 \leq x \leq \pi$. (*Ledning:* Använd partiell integration och formeln för cosinus av dubbla vinkeln.) **(4)**

Övning 4.14

a) Beräkna arean mellan kurvorna $y = e^{2x}$ och $y = e^{-3x}$ på intervallet $-1 \leq x \leq 1$. **(3)**

b) Använd ett variabelbyte för att beräkna integralen

$$\int_0^1 \frac{2t}{1 + 4t^2}\, dt.$$

(3)

c) Bestäm konstanter a och b så att $e^{-2x}(a \cos x + b \sin x)$ blir en primitiv funktion till $e^{-2x} \cos x$ och använd detta för att beräkna integralen

$$\int_0^{\pi} e^{-2x} \cos x\, dx.$$

(3)

Övning 4.15

a) Beräkna arean av området mellan kurvorna $y = \sin x$ och $y = \sin^2 x$ på intervallet $0 \leq x \leq \pi$. (Ledning: $\sin^2 x = (1 - \cos 2x)/2$.) **(3)**

b) Beräkna integralen

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx.$$

med hjälp av partiell integration. **(3)**

c) Använd trapetsmetoden med tre delintervall för att bestämma ett närmevärde till integralen

$$\int_0^{\pi/2} x^2 \sin x\, dx$$

(3)

Övning 4.16

a) Beräkna arean mellan graferna för funktionerna $g(x) = \sin 2x$ och $h(x) = \cos x$ på intervallet $-\pi/2 \leq x \leq \pi/2$. Ange svaret på exakt form. **(4)**

b) Använd trapetsmetoden med fyra lika långa delintervall för att beräkna ett närmevärde till integralen

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2/2}\,dx.$$

Ange svaret med tre siffrors noggrannhet. **(2)**

c) Beräkna integralen

$$\int_{1}^{2} x^4 \ln x\,dx.$$

Ange svaret på exakt form. **(3)**

Övning 4.17

a) Beräkna det exakta värdet av integralen

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (\sin x + \cos 2x)\,dx.$$

(3)

b) För att beräkna tyngdpunkten hos en balk vars tvärsnittsyta begränsas av kurvorna $y(x) = \pm f(x)$, för $a \leq x \leq b$, behöver man beräkna kvoten

$$T_x = \frac{\int_a^b f(x)x\,dx}{\int_a^b f(x)\,dx}.$$

Beräkna T_x om $f(x) = \sin x$ för $0 \leq x \leq \pi/3$. **(3)**

c) Beräkna volymen av den rotationskropp som bildas då kurvan $y = \sin x + 2\cos x$ roterar kring x-axeln på intervallet $-\pi/4 \leq x \leq \pi/4$. **(3)**

Övning 4.18

a) Beräkna arean av området som avgränsas av kurvorna $y = x^4$, $y = 2x^3$ och linjerna $x = -1$ och $x = 1$. Ange svaret på exakt form. **(3)**

b) Bestäm volymen av den rotationskropp som bildas då kurvan $y = xe^{-x}$ roterar kring x-axeln på intervallet $0 \leq x \leq 2$. Ange svaret på exakt form. **(3)**

c) Bestäm ett närmevärde till integralen

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

med hjälp av trapetsmetoden med fyra lika långa delintervall. Ange svaret med två decimaler. (Observera att integranden inte är definierad i punkten $x = 0$, men har ett känt gränsvärde då x går mot noll.) **(3)**

Facit

1 Geometri med trigonometri

Övning 1.1

a) $\cos\alpha = 1/\sqrt{10}$, $\cos\beta = 0$ och $\cos\gamma = 3/\sqrt{10}$.

b) Vinkeln vid B är störst.

c) Vinkeln vid B är störst om C ligger ovanför x-axeln.

Övning 1.2

a) $\sin\alpha = \frac{14}{\sqrt{13}\sqrt{17}}$, $\sin\beta = \frac{7}{\sqrt{13}\sqrt{5}}$ och $\sin\gamma = \frac{7}{\sqrt{5}\sqrt{17}}$.

b) Vinkeln β ligger nära 60°, men är lite större än 60°.

c) Cosinus för vinkeln mellan linjerna ges av $(1+k\ell)/(\sqrt{1+k^2}\sqrt{1+\ell^2})$.

Övning 1.3

a) Den tredje sidan är $6,7$ cm och vinklarna är $\beta \approx 67^\circ$ och $\gamma \approx 45^\circ$.

b) Arean av området som ligger i bägge cirklarna är $7\pi/12 - (\sqrt{3}+1)/2 \approx 0,467\text{cm}^2$.

Övning 1.4

a) Vinklarna är $\alpha = \arccos(3/4) \approx 41^\circ$, $\beta = \arccos(9/16) \approx 56^\circ$, $\gamma = \arccos(1/8) \approx 83^\circ$ och triangelns area är $15\sqrt{7}/4 \approx 9,9$ kvadratcentimeter.

b) Förhållandet mellan areorna är $2\pi/\sqrt{3} - 2 \approx 1,63$.

Övning 1.5

a) Vinklarna är $\alpha = \arccos(337/442) \approx 40,3^\circ$, $\beta = \arccos(241/374) \approx 49,9^\circ$ och $\gamma = \arccos(1/286) \approx 89,8^\circ$.

b) Andelen av arean är $3\sqrt{3}/2\pi \approx 0,83$.

c) Kvoten mellan omkretsarna är $(n/\pi)\sin\pi/n$.

Övning 1.6

a) Den tredje sidans längd är $b = 8$ och cosinus för de övriga vinklarna är $\cos A = 11/14$ och $\cos C = 1/2$.

b) Radien för cirkeln är $R = 7/\sqrt{3}$.

Övning 1.7

a) Vinklarna är $A \approx 42^\circ$, $B \approx 66^\circ$ och $C \approx 72^\circ$.

b) Tomtens area är 800 m^2.

c) Husets väggar kan vara högst $6,8$ m.

Alla svar är angivna med två gällande siffrors noggrannhet.

Övning 1.8

a) Den tredje sidan kan vara $c = 15$ m eller $c = \sqrt{129}$ m.

b) Arean av triangeln kan maximalt vara $30\sqrt{3}$ areaenheter.

c) Kateternas längder är $a = 40\sqrt{3}/7$ cm och $b = 10/7$ cm.

Övning 1.9

a) De övriga sidorna är 20 m respektive 22 m.

b) Sidlängderna är 39 m, 53 m och 57 m.

Övning 1.10

a) Den tredje sidans längd är 13 och arean är $14\sqrt{3}$.

b) Sidlängderna är $7,7$ cm, 11 cm och 14 cm.

c) Arean av området är $(1+\sqrt{2}-3\pi/8)r^2$.

Övning 1.11

a) Den tredje sidans längd kan variera mellan $\sqrt{13}$ och $\sqrt{109}$ för att arean skall vara minst 9 kvadratmeter.

b) Hexagonens area är $3\sqrt{3}/2 \approx 2,6$ areaenheter medan oktagonens bara är $1+\sqrt{2} \approx 2,4$ areaenheter.

Övning 1.12

a) Den tredje sidans längd är $7,8$ meter och vinklarna är 50°, 58° och 72°. $(0,87, 1,0$ och $1,3$ radianer.)

b) Figurens area är $(8\pi + 3\sqrt{3})r^2/6$.

Övning 1.13

a) Vinklarna är $\alpha \approx 32^\circ$, $\beta \approx 54^\circ$ och $\gamma \approx 94^\circ$.

b) Arean är 10 kvadratcentimeter.

c) Aran av cirkelsegmentet är 14 cm^2.

Övning 1.14

a) Det finns två fall. I det första är de övriga vinklarna $\beta \approx 55,1^\circ$, $\gamma \approx 100^\circ$, den tredje sidans längd $c \approx 5,4$ cm och arean $5,1$ cm^2. I det andra fallet är $\beta \approx 124,8^\circ$, $\gamma \approx 30,3^\circ$, $c \approx 2,8$ cm och arean $2,6$ cm^2.

b) Arean är $3,9$ kvadratcentimeter.

Övning 1.15

a) Sidlängderna är 10 cm, 13 cm och 14 cm, med två gällande siffrors noggrannhet.

Övning 1.16

a) Sidan AC är $7,5$ m, vinkeln vid B är 81° och vinkeln vid C är 43°.

b) Triangelns area är 16 kvadratmeter.

c) Områdets area är $0,45$ kvadratmeter.

Övning 1.17

a) Vinklarna är $\alpha \approx 23,7^\circ$, $\beta \approx 104,6^\circ$ och $\gamma \approx 51,7^\circ$, med en decimals noggrannhet.

b) Fyrhörningens area är $11,5\ \text{cm}^2$.

c) Cirkelsegmentets area är $1,68\ \text{cm}^2$.

Övning 1.18

a) Vinklarna är $16,5^\circ$, $18,2^\circ$ och $137,5^\circ$. Arean är 138 cm^2.

b) Arean av den skuggade delen av figuren är $2\pi - 3\sqrt{3}$ cm^2.

2 Trigonometriska funktioner, ekvationer och formler

Övning 2.1

a) $x = 2/9 + n/3$, där n är ett heltal.

b) Cosinus för den tredje vinkeln är $(3\sqrt{5} - 1)/8$.

c) $x = 1/4$ eller $x = \sqrt{6}/4$.

Övning 2.2

a) Samtliga lösningar ges av $t = \pm 1/150 + n/50$, där n är ett godtyckligt heltal.

b) $5\sin\omega t - 12\cos\omega t = 13\sin(\omega t + \phi)$ där $\phi = \arctan(-12/5) \approx -1,18$.

c) Det största värdet är $c + \sqrt{a^2 + b^2}$ och det minsta är $c - \sqrt{a^2 + b^2}$.

Övning 2.3

a) Lösningarna är $x = \pi(1 - 4n)/18$ och $x = \pi(4n - 1)/2$ där n är ett godtyckligt heltal.

b) Lösningarna är $x = (-3 \pm 4)\pi/12 + 2\pi n$ där n är ett godtyckligt heltal.

c) Ett exakt värde är $\sin(\pi/12) = (\sqrt{2 - \sqrt{3}})/2$.

Övning 2.4

a) Lösningarna är $x = \pi/6 + n\pi/2$, där n är ett godtyckligt heltal.

b) Vi kan skriva $g(x) = 2\cos x(\cos^2 x - 2\sin^2 x)$ och lösningarna är $x = \pi/2 + n\pi$, och $x = \pm\arctan(\sqrt{2}/2) + n\pi \approx \pm 0,62 + n\pi$ där n är ett godtyckligt heltal.

Övning 2.5

a) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin(x - \pi/3)$.

b) Lösningarna är $x = 7\pi/12 + 2\pi n$ och $x = 13\pi/12 + 2\pi n$, där n är ett godtyckligt heltal.

c) $\sin(x/2) = \pm\sqrt{(1 - \cos x)/2}$, med positivt tecken om $4\pi n \leq x \leq 4\pi n + 2\pi$ för något heltal n, annars negativt.

Övning 2.6

a) Lösningarna är $x = \pi/3 + 2\pi n/3$ och $x = \pi/2 + 2\pi n/3$, där n är ett godtyckligt heltal.

b) Vi får att $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$ och $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

Övning 2.7

a) Lösningarna är $x = 0,28$, $x = 1,2$ och $x = 1,7$.

b) Det finns nio lösningar till ekvationen i intervallet.

c) Amplituden är $A = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$.

Övning 2.8

a) Lösningarna till ekvationen ges av $x = 5\pi/2 + 3\pi n$ och $x = 3\pi n$, där n är ett godtyckligt heltal. ($150^\circ + n \cdot 540^\circ$ och $n \cdot 540^\circ$.)

b) Den minsta positiva lösningen ges av $x \approx 2,0$.

Övning 2.9

a) Lösningarna är $x = 11\pi/36 + 2\pi n/3$ och $x = 19\pi/36 + 2\pi n/3$, där n är ett godtyckligt heltal.

b) Lösningarna är $x = n\pi$, $x = 2\pi/3 + 2\pi n$ och $x = 4\pi/3 + 2\pi n$ där n är ett godtyckligt heltal. (Lösningen kan också skrivas som $x = 2\pi n/3$ och $(2n+1)\pi$, för godtyckligt n.)

c) Det minsta positiva tal som uppfyller kravet är $x = 180\pi/(180 + \pi)$.

Övning 2.10

a) Lösningarna är $23\pi/24 + 2\pi n/5$ och $29\pi/24 + 2\pi n/5$, där n är ett godtyckligt heltal.

b) Den minsta positiva lösningen är $x \approx 1,35$. $(77,3^\circ)$

c) Lösningarna är $n\pi/2$ och $\pm 2\pi/3 + 2\pi n$, där n är ett godtyckligt heltal.

Övning 2.11

a) Lösningarna ges av $x = -4\pi/15 + n\pi/2$, där n är ett godtyckligt heltal.

b) $A = \sqrt{34} \approx 5,8$.

c) $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$.

Övning 2.12

a) Lösningarna $t = 16\pi/3$ och $t = 17\pi/3$ är de enda i det givna intervallet.

b) Den minsta positiva lösningen ges av $x = 2,13$ eller $x = 122^\circ$ med tre gällande siffrors noggrannhet.

c) $A = (\sqrt{b^2 + (c - a)^2})/2$ och $B = (a + c)/2$.

Övning 2.13

a) Lösningarna ges av $x = \pi/26 + n\pi/3$ där n är ett godtyckligt heltal.

b) Den minsta positiva lösningen ges av $x = 1,70$ radianer.

c) Konstanterna är $a = 2$ och $b = -4\sqrt{3}/3$.

Övning 2.14

a) Lösningarna i intervallet $0 \leq x \leq \pi$ är $x \approx 1,14$, $x \approx 1,25$, $x \approx 2,39$ och $x \approx 2,51$.

b) Samtliga lösningar ges av $x = 7\pi/3 + 2\pi n$ och $x = 11\pi/3 + 2\pi n$, där n är ett godtyckligt heltal.

c) $\tan 2x = 2\tan x/(1 - \tan^2 x)$.

Övning 2.15

a) Lösningarna är $x = 2,17$, $x = 3,07$, $x = 5,31$ och $x = 6,21$, med tre gällande siffrors noggrannhet.

b) $4\sin x + 3\cos x = 5\cos(x + \phi)$, där $\phi = -\arctan(4/3) \approx -0,927$.

c) Lösningarna är $x = \pi/2 + n\pi$ och $x = \arctan(1/2) + n\pi$, där n är ett odtyckligt heltal.

Övning 2.16

a) Lösningarna är $x = -0,51$ och $x = 0,54$, med två värdesiffrors noggrannhet.

b) $\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x = 2\sin(2x + \pi/3)$.

c) Lösningarna ges av $\pi/2 + n\pi$ och $x = \pi/4 + n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal.

Övning 2.17

a) De två minsta positiva lösningarna är $t = 1,37$ och $t = 3,30$, med tre gällande siffrors noggrannhet.

b) Lösningarna ges av $t = \pi/2 + n\pi$ och $t = -\pi/4 + n\pi$, där n är ett godtyckligt heltal.

c) Konstanterna skall vara $a = \sqrt{3} + 1$, $b = \sqrt{3} - 1$ och $\omega = \pi/12$.

Övning 2.18

a) Den minsta positiva lösningen är $x \approx 0,29$.

b) $A = \sqrt{5} \approx 2,2$ och $\phi \approx -0,46$.

c) Det finns 479 lösningar till ekvationen i intervallet $0 \leq x \leq 100$.

3 Derivator med tillämpningar

Övning 3.1

a) $f'(x) = -4\sin x(\cos x + 1)^3$.

b) Maximum är 1 och minimum är 0.

c) Genom att se på nollställena till $g'(x)$ och $g(x)$, samt ändpunkterna på intervallet.

Övning 3.2

a) $f'(x) = 2e^{-x}\cos x$.

b) Maximum är $f(\pi/2) = e^{-\pi/2} \approx 0,21$ och minimum är $f(0) = -1$.

c) Konstanterna ges av $a = b = 2$ och $y = f(x)$ är en lösning till $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Övning 3.3

a) Derivatan av $f(x)$ är $f'(x) = \cos x - 4\cos x \sin x$.

b) Maximum av $f(x)$ är $2,1$ och minimum $-1,0$, på intervallet $0 \leq x \leq 2\pi$.

c) De exakta värdena för maximum och minimum är $17/8$, respektive -1.

Övning 3.4

a) Derivatan av $f(x)$ är $f'(x) = (6 - 7x + x^2)e^{-x/2}/2$.

b) Maximum av $f(x)$ är $2e^{-1/2} \approx 1,2$ och minimum är $-18e^{-3} \approx -0,90$.

Övning 3.5

a) Derivatan av $f(x)$ är $f'(x) = (2x^2 - 1)e^{2x}$.

b) Maximum av $f(x)$ är $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{2})e^{-\sqrt{2}} \approx 0,29$ och minimum är $\frac{1}{2}(1 - \sqrt{2})e^{\sqrt{2}} \approx -0,85$.

Övning 3.6

a) Derivatan av $f(x)$ är $f'(x) = -32\cos^3 x \sin x + 16\cos x \sin x$.

b) Derivatan av $g(x)$ är $g'(x) = -2\sin 2x \sin 3x + 3\cos 2x \cos 3x$.

c) Funktionen har ett lokalt maximum i punkten $x = \pi/3$ om $a = -2\sqrt{3}$.

Övning 3.7

a) Derivatan är $f'(x) = (\sin 2x)/x^2 - 2(\sin^2 x)/x^3$.

b) Funkionens största värdet är 2 och dess minsta värde är $2 - \sqrt{2}$.

c) Lösningen är $x = -0,32222$ med ett fel av storlek $4 \cdot 10^{-5}$.

Övning 3.8

a) Derivatan är $f'(x) = 8/(e^{2x} + e^{-2x})^2$.

b) Det största värdet är $\sqrt{3}/3$ och det minsta är $-\sqrt{3}/3$.

c) Dervatan av $\tan(x)$ är $1/\cos^2(x)$.

Övning 3.9

a) Derivatan är $f'(x) = 2/(1 + \sin 2x)$.

b) Det största värdet är $1/2$ och det minsta värdet är $-1/10$.

Övning 3.10

a) Derivatan är $f'(x) = (2\cos x + \sin x)/(2\sqrt{1 - e^{-2x}\cos x})$.

b) Nollstället är $x = 0,51$ med två gällande siffrors noggrannhet.

Övning 3.11

a) $f'(x) = (1/x)\sin^2 x + 2\ln x \sin x \cos x$.

b) Maximum ges av $g(3) = 26/9$ och minimum av $g(1) = 2$.

c) $x = 7,55$ är en approximation av $\sqrt{57}$ med tre gällande siffror.

Övning 3.12

a) $f'(x) = (1 - x^2)e^{-x^2/2}$.

b) Maximum är $f(1) = 1/\sqrt{e}$ och minimum $f(-1) = -1/\sqrt{e}$.

c) Två steg med Newton-Raphsons metod ger närmevärdet $x = 2,47$ (med tre gällande siffror).

Övning 3.13

a) $f'(x) = -e^{-\sqrt{x}}(\cos x/(2\sqrt{x}) + \sin x)$.

b) Maximum är $g(2/5) = 8\sqrt{10}/125$ och minimum är $g(1) = -1$.

c) Den förbättrade gissningen är $t_1 = \pi/(2\omega) + a/(a^2 - \omega^2)$.

Övning 3.14

a) Derivatan är $f'(x) = 2\sin x(2\cos^2 x - 1)/(1 + 2\cos^2 x)^2$.

b) Funktionens maximum är $f(1/\sqrt{2}) = \sqrt{2}/2$ och dess minimum är $f(-1/\sqrt{2}) = -\sqrt{2}/2$.

Övning 3.15

a) $f'(x) = 4\sin x \cos^3 x$.

b) Maximum är $f(2) = 5/3 \approx 1,67$ och minimum $f(\sqrt{2} - 1) = 2\sqrt{2} - 2 \approx 0,83$.

Övning 3.16

a) $f'(x) = (2\sqrt{x} - \cos^2 x \tan x)e^{-\sqrt{x}}/(2\sqrt{x}\cos^2 x)$.

b) Funktionens maximum är 3 och dess minimum är -1 på intervallet $0 \leq x \leq 2$.

c) Efter två iterationer får vi $x_2 = 0,3472$ som är ett närmevärde med en noggrannhet på $0,0001$.

Övning 3.17

a) $f'(t) = 3\sin^2 t \cos t - (3\sin t \cos 3t - 9\cos t \sin 3t)/\cos^2 3t$.

b) Funktionens maximum är $4,00$ och dess minimum är $2,40$.

c) $f'(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$.

Övning 3.18

a) $f'(x) = (\cos^2 x - \sin x)e^{\sin x}$.

b) Funktionens maximum är $4,38$ och dess minimum är $-3,00$.

c) Ett närmevärde efter två iterationer ges av $x_2 = 19/40 = 0,475$ och felet i detta c:a $4 \cdot 10^{-4}$.

4 Integraler med tillämpningar

Övning 4.1

a) Arean mellan graferna är $\pi/3 + 2\sqrt{3}$.

b) Uttrycket för arean är $(2\pi - 4a)\cos a + 4\sin a$.

c) Maximum är 2π och minimum är 4.

Övning 4.2

a) Arean av området mellan graferna är $1/2$.

b) Rotationskroppens volym är $\pi/30$.

c) Avståndet från områdets tyngdpunkt till x-axeln är $1/10$.

Övning 4.3

a) Volymen är $23\pi/24$.

b) $\int_0^\pi x^2 \sin x dx = \pi^2 - 4$.

c) $\int_0^{\sqrt{2}} x\sqrt{2 - x^2}dx = 2\sqrt{2}/3$.

Övning 4.4

a) $\int_0^\pi |\sin x - \cos 2x| dx = 3\sqrt{3} - 2$.

b) $\int_1^2 (\ln x)^2 dx = 2(\ln 2)^2 - 4(\ln 2) + 2 \approx 0,19..$

Övning 4.5

a) Arean mellan kurvorna ges av $(e^2 + 1)(e - 1)^2/2e^2 \approx 1,68$.

b) $\int_0^\pi x \sin x \, dx = \pi$.

c) Trapetsmetoden ger $\pi^2(\sqrt{2} + 1)/8 \approx 2,98$.

Övning 4.6

a) $\int_0^2 f(x)^2 dx = (e^4 - 4e^2 + 7)/2$.

b) $\int_0^1 (1 - x^2)e^x \, dx = 1$.

c) Konstanten är $K = e^{anT}$.

Övning 4.7

a) Integralernas värden blir $1/2$, respektive $\pi(24 - \pi^2)/96$ och felet man får genom att använda approximationen är $(24\pi - \pi^3 - 48)/96 \approx -0,038$.

b) Felet man får genom att använda trapetsmetoden blir $(\pi(2+\sqrt{3}) - 12)/24 \approx -0,011$.

c) Rotationskroppens volym är $V = \pi(2e - 1) \approx 13,9$ volymsenheter.

Övning 4.8

a) Arean av området är $9/8$ areaenheter.

b) $$\int_0^\pi \frac{\sin x}{2 + \cos x}\, dx = \ln(3)$$

c) Värdet på a som minimerar integralen är $a = 3/\pi^2$.

Övning 4.9

a) Arean av området är $32/3$ areaenheter.

b) Integralens värde är $\pi/4$.

c) Arean av området är $4|\sin((a-b)/2)|$ $\quad (= 2\sqrt{2-2\cos(a-b)})$.

Övning 4.10

a) Arean är $(\pi^2-8)/4$.

b) Volymen är $\pi^2(\pi^2-6)/12$.

c) $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx = 2-2\ln 2$.

Övning 4.11

a) Arean mellan kurvorna är $32/3$ areaenheter.

b) $(1/4-x^2/2)\cos 2x+(x/2)\sin 2x$ är en primitiv funktion till $x^2\sin 2x$.

c) Rotationsvolymen är $2\pi-\pi^2/2(\approx 1,35)$ volymnsenheter.

Övning 4.12

a) Arean av det området mellan kurvorna är $1/2$ (areaenheter).

b) Uppskattningen med trapetsmetoden ger $0,16$.

c) $\int_0^2 xe^{-x^2/2}\,dx = 1-e^{-2}$.

Övning 4.13

a) Arean mellan kurvorna är $23/3$ areaenheter.

b) $\int_0^{\pi/2}(\sin 2x-\cos 3x)\,dx = 4/3$.

c) Volymen av rotationskroppen är $\pi^3/4$ volymsenheter.

Övning 4.14

a) Arean mellan kurvorna är $(e^3+e^{-3})/3+(e^2+e^{-2})/2-5/3$ areaenheter.

b) $\int_0^1 2t/(1+4t^2)\,dt = (\ln 5)/4$.

c) $a=-2/5$ och $b=1/5$ vilket leder till $\int_0^{\pi} e^{-2x}\cos x\,dx = 2(1+e^{-2\pi})/5$.

Övning 4.15

a) Arean mellan graferna är $2-\pi/2$ areaenheter.

b) $\int_0^{\pi/2} x^2\sin x\,dx = \pi-2$.

c) En approximation med tre delintevall ger $1,2$.

Övning 4.16

a) Arean mellan graferna är $5/2$ areaenheter.

b) Trapetsmetoden med fyra delintervall ger $\int_{-1}^1 e^{-x^2/2}\,dx \approx 1,69$.

c) $\int_1^2 x^4\ln(x)\,dx = (160\ln 2-31)/25$.

Övning 4.17

a) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}(\sin x+\cos 2x)\,dx = 1$.

b) Vi får $T_x = (3\sqrt{3}-\pi)/3$.

c) Rotationskroppens volym är $5\pi^2/4+3\pi/2$ volymsenheter.

Övning 4.18

a) Arean av området mellan graferna är 1 areaenhet.

b) Volymen av rotationskroppen är $\pi(1-13e^{-4})/4$ volymsenheter.

c) Trapetsmetoden ger närmevärdet $2,70$.