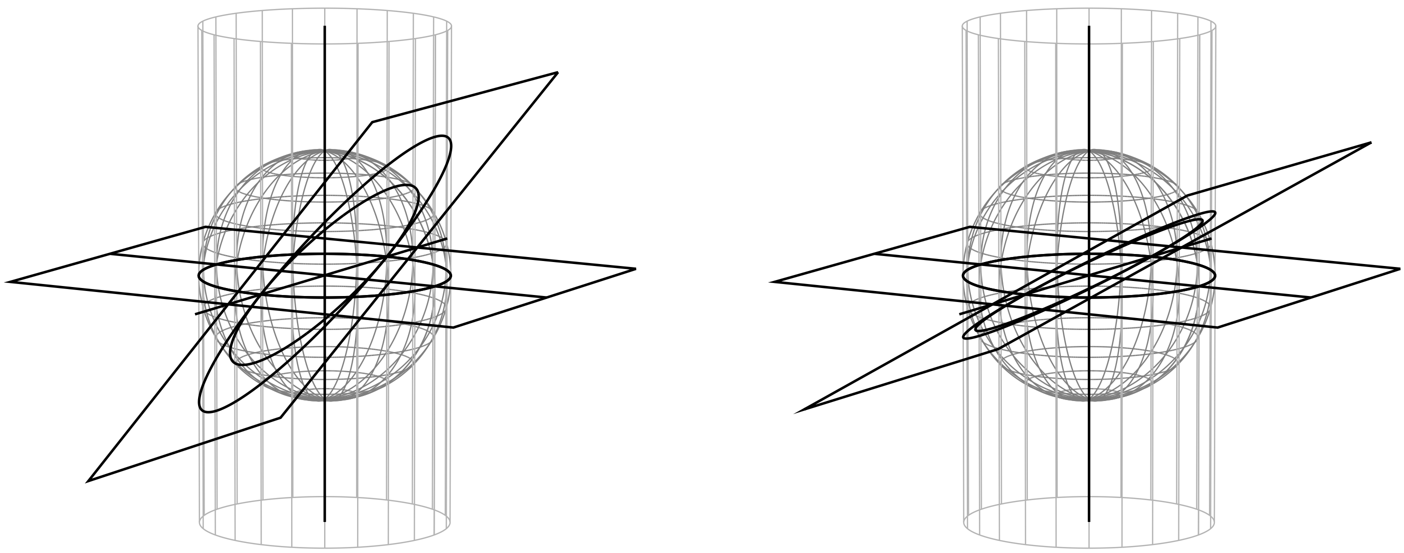
KTH Teknikvetenskap

SF1620 MATEMATIK OCH MODELLER – OM CYLINDERPROJEKTION AV EN SFÄR

För att lösa en del av inlämningsuppgiftern krävs att man vet hur en cylinderprojektion av en sfär går till. Det är den typen av projektion som används när man gör en Mercatorprojektion av jorden för att rita en världskarta på ett plant papper.

Idén är att man placerar sfären i en cylinder som tangerar sfären i en storcirkel, säg ekvatorn. Vi projicerar sedan från sfären till cylindern genom att ta en stråle från sfärens centrum, genom sfären och ut genom cylindern. På så sätt får varje punkt på sfären utom polerna, en motsvarnade punkt på cylindern. För att sedan rita ut projektionen på ett papper måste vi platta ut cylindern genom att klippa upp den utefter en linje parallell med cylinderns axel.

1. STORCIRKLAR



Den kortaste vägen mellan två punkter på sfären går via en *storcirkel*, dvs en cirkel som har samma centrum som sfären. Därmed är också cirkelns radie lika med sfärens radie och detta är den största radie en cirkel på sfären kan ha.

Vi behöver se på bilden av storcirklarna genom den cylindriska projektionen. Varje storcirkel är skärningen mellan sfären och ett plan som går genom sfärens centrum, O. Bilden på cylindern blir därigenom skärningen av samma plan med cylindern.

Om vi låter origo vara i sfärens centrum om z-axeln utefter cylinderns axel kan vi beskriva punkterna på cylindern genom ekvationen $x^2 + y^2 = r^2$. Ett plan genom origo kan beskrivas av $z = ax + by$ om det inte är parallellt med x-axeln.

Skärningen mellan cylindern och planet fås alltså av

$$\begin{cases} x^2 + y^2 &= r^2 \\ ax + by &= z \end{cases}$$

På papperet har vi koordinater (ϕ, z) som motsvarar punkten

$$\begin{cases} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \\ z &= z \end{cases}$$

Alltså får vi ekvationen för storcirkeln på papperet genom

$$\begin{cases} r^2\cos^2\phi + r^2\sin^2\phi &= r^2 \\ ar\cos\phi + br\sin\phi &= z \end{cases}$$

Eftersom den första ekvationen är uppfylld för alla ϕ genom den trigonometriska ettan får vi att kurvan på den plana kartan ges av

$$z = ar\cos\phi + br\sin\phi.$$

Detta är faktiskt en sinuskurva, vilket är lättast att se genom att byta koordinater på så att planet kan skrivas $z = Ay'$, för något A. Det kan vi göra genom att låta x-axeln ligga i skärningen mellan planet och ekvatorsplanet $z = 0$. Då får vi ekvationen $z = A\sin(\phi + \phi_0)$ för kurvan på den plana kartan.

Vi kan se vilken relation som måste finnas mellan A, ϕ_0, a och b. Vi ska ha att

$$a\cos\phi + b\sin\phi = A\sin(\phi + \phi_0)$$

för alla värden på ϕ. Speciellt kan vi prova att sätta in $\phi = 0$ och $\phi = \pi/2$, eftersom $\sin\phi$ och $\cos\phi$ då är antingen ett eller noll.

$$\begin{cases} a\cos 0 + b\sin 0 &= A\sin(0 + \phi_0) \\ a\cos(\pi/2) + b\sin(\pi/2) &= A\sin(\pi/2 + \phi_0) \end{cases} \iff \begin{cases} a &= A\sin\phi_0 \\ b &= A\sin(\pi/2 + \phi_0) = \cos\phi_0 \end{cases}$$

Vi har på det här viset fått en härledning av *additionssaten för sinus*, eftersom

$$A\sin(\phi + \phi_0) = A\sin\phi_0\cos\phi + A\cos\phi_0\sin\phi$$

innebär att

$$\sin(\phi + \phi_0) = \sin\phi_0\cos\phi + \cos\phi_0\sin\phi$$

och det här måste gälla för alla val av ϕ och ϕ_0.

2. Cylindriska koordinater

Det vi har gjort när vi går mellan den plana kartan och cylindern är att vi har utnyttjat det som kallas *cylindriska koordinater*. Det är koordinater i rummet som är lämpliga att använda när man har cylindrisk symmetri av någon form. De cylindriska koordinaterna (r, ϕ, z) fås från de rätvinkliga koordinaterna (x, y, z) genom

$$\begin{cases} x &= r\cos\phi, \\ y &= r\sin\phi, \\ z &= z. \end{cases}$$

Detta liknar mycket det som kallas *polära koordinater* i planet, där vi har samma relation mellan (x, y) och (r, ϕ).