Lösningar till tentamen den 26/8 2008

Matematik II, SF 1609

1. $D_1 f(x,y) = 3x^2 e^{-y}$, $D_2 f(x,y) = -x^3 e^{-y}$

$\text{grad} f(1,0) = (3,-1)$

Riktningen är $(0,2)-(1,0) = (-1,2)$, $\|(-1,2)\| = \sqrt{5}$.

Riktningsderivatan är $(3,-1)\cdot\frac{(-1,2)}{\sqrt{5}} = \frac{-5}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{-\sqrt{5}}}$

2. a) Svar: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$

b) $T(1,2) = (-1,9) = \frac{8}{3}(1,2) - \frac{11}{3}(1,-1)$

$T(1,-1) = (2,5) = \frac{8}{3}(1,2) - \frac{2}{3}(1,-1)$ $\Rightarrow$

T:s matris i basen $\{(1,2),(1,-1)\}$ är $\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{8}{3} \\ -\frac{11}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

3. Ekvationssystemet $\begin{cases} 2+t = 1+2s \\ 1-t = s \\ 2t = 2-s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-2s = -1 \\ t+s = 1 \\ 2t+s = 2 \end{cases}$

är på matrisform $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 4 \end{array}\right)$

$3s = 2$
$5s = 4$ $\Rightarrow$ Ekv. systemet har ingen lösning

$\Rightarrow$ Linjerna skär inte varandra.

4. Vi undersöker om ekvationssystemet

$\lambda_1(1,0,-1,2) + \lambda_2(1,1,-4,10) + \lambda_3(-1,1,-2,6) = \bar{0}$

har andra lösningar än $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 4\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 10\lambda_2 + 6\lambda_3 = 0 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$

$\frac{1}{2}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Ekv. systemet har oändligt många lösningar.

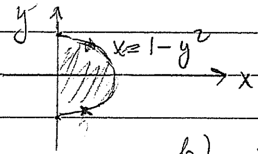
$\Rightarrow$ Vektorerna är linjärt beroende.

5. I De kritiska punkterna

$D_1 f(x,y) = y^2$
$D_2 f(x,y) = 2xy$ $\quad \begin{cases} y^2 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases} \Rightarrow (x,0) \quad 0 \le x \le 1$

är de kritiska punkterna

$f(x,0) = 0$.



II Randen

a) $x = 0 \quad -1 \le y \le 1 \qquad f(0,y) = 0$

b) $x = 1-y^2$

$f(x,y) = x(1-x) = x - x^2 = g(x), \quad 0 \le x \le 1$

$g'(x) = 1-2x = 0$ om $x = \frac{1}{2}$

$g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ $\qquad x = \frac{1}{2} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2} \quad y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$g(0) = g(1) = 0$

Det största värdet är $\underline{\underline{\frac{1}{4}}} = f(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$

Minsta värdet är $\underline{\underline{0}}$.

6. $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3a & 3a \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 3a-2 & 3a-6 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3a-4 & 3a-4 \end{array}\right)$ 1) Om $3a-4 = 0$, $a = \frac{4}{3}$ så är den sista raden en nollrad

$z = t \Rightarrow y = 2+2t, \; x = 3-y-z = 1-3t$

2) Om $3a-4 \neq 0$ ekv. systemet är $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$\Rightarrow z = 1, \; y = 2z+2 = 4, \; x = -2$

Svar: Om $a = \frac{4}{3}$ $\begin{cases} x = 1-3t \\ y = 2+2t \\ z = t \end{cases}$

Om $a \neq \frac{4}{3}$ $\begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \\ z = 1 \end{cases}$

7. Låt $H(x,y) = \left(\frac{1}{x}+y,\ x+\frac{1}{y}\right)$, då är $g = f \circ H$. Enligt kedjeregeln är

$D_1 g(x,y) = -\frac{1}{x^2} D_1 f(H(x,y)) + D_2 f(H(x,y))$

$D_2 g(x,y) = D_1 f(H(x,y)) - \frac{1}{y^2} D_2 f(H(x,y))$

Eftersom $H(1,-1) = (0,0)$, är

$D_1 g(1,-1) = -2-3 = -5$, $D_2 g(1,-1) = 2+3 = 5$

$\text{grad } g(1,-1) = \underline{\underline{(-5,5)}}$

8. $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x-y)^2$

(1) $D_1 f(x,y) = 4x^3 - 2(x-y) = 0 \quad \Rightarrow x-y = 2x^3 = -2y^3$

(2) $D_2 f(x,y) = 4y^3 + 2(x-y) = 0 \quad \Rightarrow y = -x$

Insättning av $y=-x$ i (1) ger $4x^3 - 4x = 0$

$x(x^2-1) = 0 \Rightarrow x=0,\ x=\pm 1.$

De kritiska punkterna är $(0,0)$ och $\pm(1,-1)$.

$D_{11} f(x,y) = 12x^2 - 2 \qquad D_{12} f(x,y) = 2$

$D_{22} f(x,y) = 12y^2 - 2$

I punkterna $\pm(1,-1)$ får vi en kvadratisk form

$Q(h,k) = 10h^2 + 4hk + 10k^2 = 10(h+\frac{k}{5})^2 + \frac{48}{5}k^2$

som är positivt definit.

I punkterna $\pm(1,-1)$ har f lokalt minimum,

$f(\pm(1,-1)) = -2$

I origo $Q(h,k) = -2(h-k)^2$ är negativt semidefinit.

$$\begin{cases} f(0,0) = 0 \\ \text{På linjen } y=x \quad f(x,x) = 2x^4 > 0 \text{ om } x \neq 0 \\ \text{På linjen } y=-x \quad f(x,-x) = 2x^4 - 4x^2 = 2x^2(x^2-2) \\ \text{som är } < 0 \text{ om } |x|<2,\ x\neq 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Origo är en sadelpunkt.

9. a) Tangentplanet till ytan $x^2+y^2-z^2-1=0$ i en punkt (x_0,y_0,z_0) är parallellt med planet $5x+5y+z+7=0$
$\Leftrightarrow$ ytans gradient i (x_0,y_0,z_0) är parallellt med planets normal $(5,5,1)$.

$(2x_0, 2y_0, -2z_0) = t(5,5,1) \Leftrightarrow x_0 = y_0 = \frac{5}{2}t,\ z_0 = -\frac{1}{2}t$

Punkten är på ytan $\Rightarrow 2\cdot(\frac{5}{2}t)^2 - (\frac{1}{2}t)^2 = 1 \quad \Rightarrow t = \pm\frac{2}{7}$.

Svar: I punkterna $\pm(\frac{5}{7}, \frac{5}{7}, -\frac{1}{7})$ har ytan tang-plan som är parallella med planet.

b) Ja, i punkten $(-\frac{5}{7}, -\frac{5}{7}, \frac{1}{7})$ som ligger i planet $5x+5y+z+7=0$.

10. a) Planets normal $n = (1,-1,0)$ avbildas i speglingen på $-n$.
Punkten $(1,1,0)$ är i planet. Den avbildas på sig själv.

$\Rightarrow A\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow -1$ och 1 är egenvärden till A

b) En annan punkt i planet är $(0,0,1)$.

$A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Matrisen $P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ har invers: $\det P = 2 \neq 0$

och P:s kolonner är A:s egenvektorer.

$\Rightarrow P^{-1}AP = D$ där $D = \underline{\underline{\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}}$